МЕЛИОРАЦИЯ

УДК 519.24: 551.5

СТАТИСТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ УРОВНЕЙ ВОДЫ В ВОДОТОКАХ С УЧЕТОМ ОСАДКОВ И ТЕМПЕРАТУРЫ ВОЗДУХА

Н.К. Вахонин, *кандидат технических наук*
Г.А. Писецкий, *кандидат технических наук*
(Институт мелиорации и луговодства НАН Беларуси)

Одним из важнейших факторов, определяющих урожайность сельскохозяйственных культур, является водный режим территорий. В связи с этим при проектировании мелиоративных систем, как на стадии первоначального осушения, так и при их реконструкции, выбор должен основываться на сравнении урожаев, формирующихся при водном режиме, соответствующем различным вариантам параметров системы.

Моделирование водного режима основывается на использовании уравнений динамики воды в грунте и мелиоративной сети, совместное решение которых дает детерминированное описание водного режима. Однако для решения этих уравнений должны быть заданы входные воздействия в рассматриваемую систему со стороны внешней среды. В частности, в качестве граничного условия должны быть заданы уровни воды (УВ) в замыкающем створе. Их задание в детерминированном виде возможно только при расширении моделируемой области с включением в нее этого створа в качестве рассчитываемого, т.е. принятие в качестве замыкающего створа сечения, расположенного ниже по течению. Однако для него будет иметь место та же проблема задания граничного условия. Поэтому для незамкнутой гидрографической системы при проектировании неизбежно задание граничного условия в замыкающем створе стохастически. При этом, несмотря на детерминированное списание динамики воды в русловой сети и грунте, прогноз их будет иметь вероятностный характер. Сформулировано положение о том, что моделируемая область должна быть шире оптимизируемой настолько, чтобы практически исключить влияние обратных связей, приводящих к изменению входных воздействий на границе в зависимости от различных вариантов параметров [1]. В этом случае для задания входных воздействий могут использоваться данные предыдущих наблюдений в рассматриваемом сечении, так как их однородность практически не нарушится после строительства любого варианта системы.

Буквальное повторение имеющихся рядов наблюдений в будущем невозможно. Поэтому для корректного задания входных воздействий на их основе должны быть генерированы ряды, подобные им статистически. Ранее разработаны методы генерирования основных погодно-климатических воздействий: случайных рядов осадков и температуры воздуха [2, 3]. Особенностью уровней воды в замыкающем створе водотока является то, что они заведомо зависят от других характеристик, как непосредственно определяющих формирование водного баланса, а значит и УВ – осадков, так и от влияющих опосредованно – температур воздуха.

Таким образом, при моделировании уровенного режима водотока статистическими методами возникает необходимость совместного рассмотрения ряда других случайных процессов, влияющих на уровенный режим, т.е. рассмотрения системы случайных величин. Свойства системы случайных величин не исчерпываются свойствами отдельных из них, они включают также взаимные зависимости между составляющими системы. В соответствии с корреляционной теорией системы случайных процессов для их описания необходимыми характеристиками являются условные математические ожидания, условные дисперсии и корреляционная функция связи. Помимо этого, так как изменения УВ являются инерционным процессом, то при их моделировании должна учитываться автокорреляция во времени. Моделирование УВ осуществляется для каждого дня года. Эти особенности учитываются при разработке алгоритма генерирования УВ в данной работе.

Для описания корреляционной зависимости случайной величины Z (уровней воды в замыкающем створе) с двумя случайными величинами X (осадками) и Y (температурой воздуха) используется линейная комбинация вида

$$Z = C_0 + C_1X + C_2Y, \qquad (1)$$

где коэффициенты C_0, C_1, C_2 – некоторые константы, подлежащие определению.

Для удобства дальнейших вычислений введем обозначение

$$F(C_0, C_1, C_2) = M(Z - C_0 - C_1X - C_2Y)^2. \qquad (2)$$

Коэффициенты C_0, C_1, C_2 выбираются из условий, при которых функция $F(C_0, C_1, C_2)$ принимает минимальное значение. Для упрощения дальнейших выкладок перейдем к нормированным случайным величинам

$$Z1 = \frac{Z - m_z}{\sigma_z}, \quad X1 = \frac{X - m_x}{\sigma_x}, \quad Y1 = \frac{Y - m_y}{\sigma_y}. \qquad (3)$$

Тогда, выполнив вычисления правой части выражения (2), получим

$$F(C_0, C_1, C_2) = 1 - C_0^2 - 2C_1r_{xz} - 2C_2r_{yz} + C_1^2 + 2C_1C_2r_{xy} + C_2^2. \qquad (4)$$

Из условий экстремума функции F находим

$$\frac{\partial F}{\partial C_0} = 2C_0 = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial C_1} = 2C_1 - 2r_{xz} + 2C_2r_{xy} = 0, \qquad (5)$$

$$\frac{\partial F}{\partial C_2} = 2C_2 - 2r_{yz} + 2C_1r_{xy} = 0.$$

Из решения системы уравнений (5) находятся

$c_0 = 0$,

$$c_1 = \frac{r_{zx} - r_{zy} r_{xy}}{1 - r_{xy}^2}, \tag{6}$$

$$c_2 = \frac{r_{zy} - r_{zx} r_{xy}}{1 - r_{xy}^2}.$$

Возвращаясь к исходным переменным, получим условное математическое ожидание случайной величины Z

$$m_{z/xy} = m_z + c_1 \frac{\sigma_z}{\sigma_x}(x - m_x) + c_2 \frac{\sigma_z}{\sigma_y}(y - m_y). \tag{7}$$

Условная дисперсия определяется формулой

$$\sigma^2_{z/xy} = \sigma^2_z \frac{D}{1 - r_{xy}^2}. \tag{8}$$

Сводный коэффициент корреляции между Z (уровнями воды), X (осадками) и Y (температурой воздуха) выражается зависимостью

$$R = \sqrt{1 - \frac{D}{D_{11}}}, \tag{9}$$

где $$D = \begin{vmatrix} 1 & r_{zx} & r_{zy} \\ r_{zx} & 1 & r_{xy} \\ r_{zy} & r_{xy} & 1 \end{vmatrix}, \qquad D_{11} = 1 - r_{xy}{}^2. \tag{10}$$

Для реализации процесса генерирования уровенного режима необходимо предварительно для каждой даты календарного года найти:

- оценки математических ожиданий по уровням, температуре и осадкам по формулам

$$M_x(t_j) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i(t_j), \qquad j = 1,\ 2,\ldots\ m; \tag{11}$$

- средние квадратические отклонения соответственно по уровням воды, температуре и осадкам согласно формулам

$$\sigma_x(t) = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left[X_i(t_j) - M_x(t_j)\right]^2}; \tag{12}$$

- нормированные корреляционные функции связи между осадками и температурой, осадками и уровнями, уровнями и температурой

$$r_{zx}(t_j,t_k)=\frac{R_{zx}(t_j,t_k)}{\sigma_z(t_j)\sigma_x(t_k)}, \tag{13}$$

где

$$R_{zx}(t_j,t_k)=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}[Z_i(t_j)-M_z(t_j)][X_i(t_k)-M_x(t_k)]; \tag{14}$$

– нормированную корреляционную функцию для смежных дат по уровням воды

$$r_{zz}(t_j,t_{j+1})=\frac{R_{zz}(t_j,t_{j+1})}{\sigma_z(t_j)\sigma_z(t_{j+1})}, \tag{15}$$

- условное математическое ожидание и условную дисперсию по формулам (7), (8).

В приведенных формулах индекс j означает порядковый номер дня календарного года, а i – порядковый номер года из всех n лет, задействованных для обработки.

Для моделирования уровней воды в водотоках взята схема простой цепи Маркова, использование которой нашло широкое применение в практике гидрологических расчетов для описания различных стохастических процессов [4].

Если исходный процесс нормализовать, т.е. преобразовать его с помощью зависимости

$$\vartheta_j(t_i)=\frac{Z_j(t_i)-m_{z/xy}(t_i)}{\sigma_{z/xy}(t_i)}, \qquad j=1,\ 2\ldots\ m, \qquad i=1,\ 2\ldots\ n \tag{16}$$

то моделирование такого процесса осуществляется по рекуррентной зависимости [5]

$$\eta_{j+1}=r_{zj}\eta_j+\xi_{j+1}\sqrt{1-r_{zj}^2}, \tag{17}$$

где x_{j+1} – последовательность независимых нормально распределенных случайных величин с параметрами (0,1), r_{zj} – коэффициент корреляции между смежными сечениями в момент времени t_j и t_{j+1}.

Моделирование последовательности x_{j+1} для существенного сокращения вычислительного процесса осуществляется на основании аппроксимационной зависимости [6]

$$\xi(z)\approx-\theta+\frac{2.515517+0.802853\theta+0.01328\theta^2}{1+1.432788\theta+0.189269\theta^2+0.001308\theta^3}; \tag{18}$$

где

$$\theta=\sqrt{-2Ln(z)},\quad 0.5<z<1$$

Ошибка такой аппроксимации по модулю менее 0.00045 при $z < 0.9$.

Таким образом, генерирование значений уровней воды в водотоке на каждый день года в соответствии с вышеизложенным реализуется с помощью следующих шагов.

1. Для каждой даты календарного года находятся оценки математического ожидания и дисперсии по формулам (11), (12).

2. Нормируются исходные данные по формуле (16).

3. Вычисляются корреляционные функции связи по формуле (13).

4. Разыгрывается равномерно распределенное случайное число из интервала (0.1), для которого находится соответствующее значение нормально распределенной величины с математическим ожиданием 0 и дисперсией 1. Моделирование последней осуществляется по формуле (18).

5. Осуществляется переход к величинам с исходными параметрами, т.е. выполняется операция, обратная нормировочной:

$$Z_j(t_i) = \eta_j(t_i)\sigma_{z/xy}(t_i) + m_{z/xy}(t_i) \tag{19}$$

6. По формуле (17) осуществляется расчет последующего значения η_{j+1}. Далее расчет повторяется с шага 4.

7. Формируется выводной файл, содержащий смоделированные значения уровней для каждого дня по рассматриваемому пункту наблюдений.

Реализация описанного алгоритма проводилась на основе соответствующих рядов 30-летних мониторинговых наблюдений на Пружанском стационаре. При этом подготовка данных для расчетов осуществлялась с помощью специальной процедуры, обеспечивающей формирование необходимой структуры данных непосредственно из созданной базы данных мониторинга. Численные эксперименты велись по различным водпостам и для расчета использовались данные ежесуточных наблюдений за период от 20 до 30 лет, т.е. задействовались все накопленные в базе данные. За один сеанс строится временной ряд для каждой даты года, т.е. формируется годовая таблица значений моделируемого процесса.

Для визуального представления полученных результатов на экран выводится график смоделированного ряда и фактические данные за год, который наиболее сходен (близок) к расчетному сценарию. В качестве меры сходства между объектами (временными рядами) X и Y использовалось Евклидово расстояние, определяемое формулой

$$D = \frac{1}{m}\Big[\sum_{j=1}^{m}(x_j - y_j)^2\Big]^{1/2}. \tag{20}$$

В качестве примера на рис.1 представлен график разыгранного сценария и график фактических данных за 1983 г., которые оказались наиболее близкими по расстоянию (20) к расчетным данным.

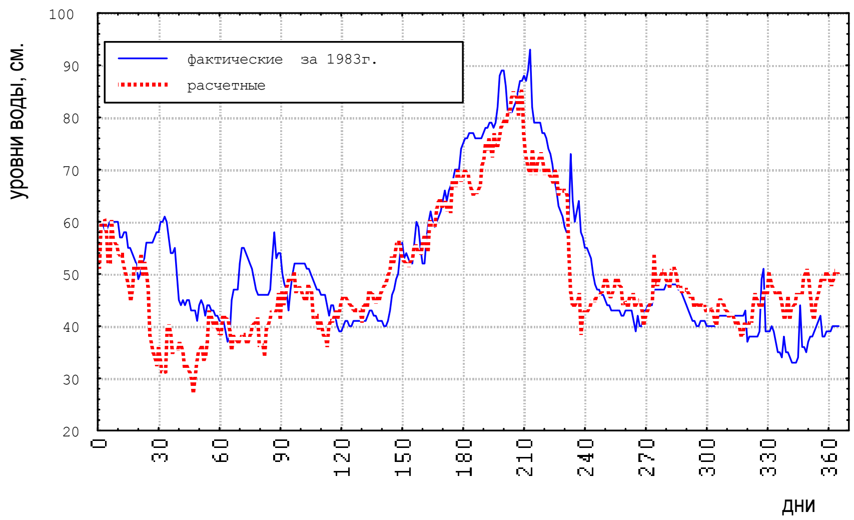

Рис. 1. Расчетные и фактические за 1983 г. уровни воды по водносту Ясельда-Трухановичи

При моделировании процессов с учетом случайных факторов необходимо генерировать большое количество годичных реализаций и определять искомые величины как средние значения. Если число реализаций N достаточно велико, то в силу закона больших чисел получаемые оценки приобретают статистическую устойчивость и с достаточной для практики точностью могут быть приняты в качестве приближенных значений искомых величин.

Для оценки соответствия статистических характеристик теоретических и наблюденных рядов были выполнены несколько серий расчетов, содержащих разыгранные сценарии соответственно за 1, 5,10,15 и 20 лет. Статистические параметры каждой из серий сравнивались между собой и значениями, полученными из наблюденных многолетних рядов. Анализ полученных материалов свидетельствует о том, что с увеличением N статистические параметры сгенерированных рядов сходятся к значениям найденным по исходным рядам наблюдений (см. таблицу).

Статистические показатели фактических и расчетных временных рядов суточных значений уровней воды для водноста Ясельда-Трухановичи

Данные		Среднее	Средний за многолетие минимум	Средний за многолетие максимум	Дисперсия	Ошибка средней
Фактические за 20 лет		55,9	47,3	72,6	6,43	0,34
Сгенерированные значения	1 год	46,9	22,4	78,0	10,85	0,57
	5 лет	60,6	46,5	97,6	12,28	0,64
	15 лет	56,2	43,1	79,7	8,93	0,47
	20 лет	55,5	46,0	76,6	7,91	0,41

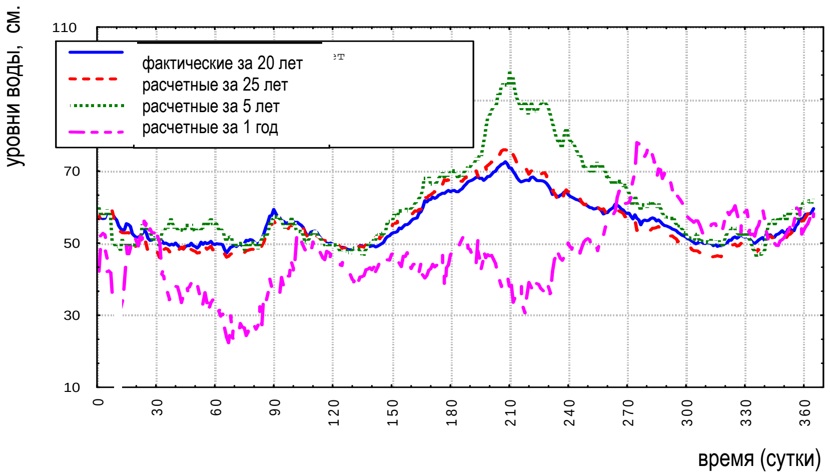

Рис. 2. График среднемноголетних фактических и смоделированных рядов уровней воды

Об этом свидетельствуют и значения коэффициентов корреляции r между рядами математических ожиданий, найденных по наблюденным многолетним данным и полученных из различных серий сгенерированных рядов. Так, если при N=1 r=0,01, то уже при N=15 r=0,98, а при N=25 r=0,99. Таким образом, полученные теоретические ряды отражают основные черты наблюденных данных, их статистические характеристики стремятся к характеристикам исходных рядов, что наглядно видно из рис. 2.

В связи с этим правомочно их использование в качестве граничных условий при моделировании водного режима под влиянием мелиоративных систем.

Литература

1. Вахонин Н.К. Системный анализ моделирования природно-технических систем в применении к мелиоративным сельскохозяйственным объектам.// Современные проблемы стохастической гидрологии. Тр. конф. РАН. – М., 2001. – С. 45-74.
2. Вахонин Н.К., Писецкий Г.А. Стохастическое моделирование осадков при планировании мероприятий по трансформации мелиоративных систем.// Современные проблемы стохастической гидрологии. Тр. конф. РАН. – М., 2001. – С. 191-193.
3. Вахонин Н.К., Писецкий Г.А. Температурный режим воздуха на мелиорированных болотах и его моделирование методом статистических испытаний.// Мелиорация переувлажненных земель. – 2004. – №2(52). – С. 20-27.
4. Сванидзе Г.Г. Математическое моделирование гидрологических рядов. – Л.: Гидрометеоиздат, 1977. – 296 с.
5. Пиранашвили З.А. О представлении условных случайных процессов.// Тр. Ин-та прикладной математики ТГУ. Т. 1. – 1969. – С. 39-47.
6. Харин Ю.С., Степанова М.Д. Практикум на ЭВМ по математической статистике. – Мн.: Университетское, 1987. – 175 с.

Резюме

Методом статистических испытаний (метод Монте-Карло) с использованием аппарата марковских цепей разработан алгоритм и осуществлена программная реализация процесса генерирования случайных значений уровней воды в водотоках во взаимосвязи со случайной величиной осадков и температуры воздуха. В качестве информационного обеспечения для реализации описанного алгоритма и осуществления численных экспериментов использовались материалы многолетних мониторинговых режимных наблюдений на Пружанском стационаре.

Осуществляемые численные расчеты показали сходимость по вероятности сгенерированных по разработанному алгоритму значений уровней к непосредственно измеренным рядам.

Ключевые слова: режим уровней, случайный процесс, стохастическое моделирование, закон распределения, моменты распределения, условное математическое ожидание, условная дисперсия, корреляционная функция связи.

Summary

Vakhonin N., Pisetskiy G. Statistical modelling water levels in channels with taking into account precipitations and air temperature

There were designed algorithm and programme realization for the process of generating of casual values of level water in channels in intercoupling with random quantity of precipitations and air temperature by the method of statistical test (the Monte-Carlo method) with use of Markov's chains. Materials of perennial monitoring regime observations on the Pruzhanskiy stationary were used as dataware for realization of the described algorithm and realization numerical experiment.

Realized calculations have shown the convergence on probability of values generated on designed algorithm with directly measured one.

Key words: level mode, casual process, stochastic modelling, law of the distribution, distribution moments, conditional mathematical mean, conditional dispersion, correlating bond function.