

## **ЗЕМЛЕДЕЛИЕ И РАСТЕНИЕВОДСТВО**

УДК 631.175

### **МОДЕЛЬ ВЛИЯНИЯ РЕГУЛИРУЕМЫХ ФАКТОРОВ ОКРУЖАЮЩЕЙ СРЕДЫ НА УРОЖАЙ СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННЫХ КУЛЬТУР**

**А.П. Лихацевич**, член-корреспондент НАН Беларуси,  
доктор технических наук, профессор  
(Институт мелиорации и луговодства НАН Беларуси)

#### **Введение**

В процессе многовековой сельскохозяйственной деятельности человечество постоянно совершенствует стратегию производства растениеводческой продукции. Даже на примере последних поколений мы можем наблюдать постепенный переход от экстенсивного земледелия к интенсивному и далее к адаптивному, биологическому. Искусство земледельца проявляется в том, чтобы используя положительные факторы внешней среды, имеющиеся ресурсы с применением системы мелиораций (химических, водных, биологических и др.), нейтрализующих негативное воздействие среды на формирование урожая (низкое плодородие и неблагоприятные свойства почв, переувлажнения, засухи, заморозки, засоренность посевов и т.п.), обеспечить производство высококачественной продукции при снижении затрат и минимизации отрицательного влияния на природные комплексы.

При этом одним из рычагов прогресса, помимо конъюнктуры рынка, является государственное регулирование сельскохозяйственного производства. Причем, для обеспечения стабильности экономического положения и адекватного реагирования на государственную политику и условия рынка сельхозпроизводитель должен иметь достаточно уверенный прогноз получения того или иного урожая в зависимости от природных факторов и вкладываемых ресурсов.

Актуальность планирования урожайности сельскохозяйственных культур и валовых сборов растениеводческой продукции обусловили появление целого научного направления – так называемого «программирования урожая». Обобщенный учет достижений данного научного направления к настоящему времени позволил выработать нормативные показатели трудовых и материальных затрат для ведения сельскохозяйственного производства [3]. Данные нормативы базируются на установленных опытным путем закономерностях, отражающих зависимость прогнозируемого урожая от вложенных ресурсов.

Вместе с тем, проблему никак нельзя считать исчерпанной. Многие исследователи продолжают совершенствовать методику заблаговременного определения конечного урожая, привлекая для этого доступный им математический аппарат [2, 4 и др.]. Данная работа также направлена на развитие формальных представлений о взаимосвязях в системе «растение – окружающая среда» и построение достаточно общей модели влияния управляемых факторов внешней среды на величину урожая сельскохозяйственной культуры.

### ***1. Постановка задачи***

Формирование урожая проходит под воздействием комплекса факторов: как природных (освещенность, газовый режим, тепло- и влагообеспеченность, естественное почвенное плодородие и др.), так и антропогенных (качество семенного материала, пищевой режим, уровень агротехники, техническая оснащенность, обеспеченность средствами защиты и пр.). Регулированию в условиях сельскохозяйственного производства поддаются такие факторы внешней среды, как пища, вода, частично тепло. Не поддаются регулированию (кроме условий защищенного грунта) освещенность, газовый режим. Вместе с тем любая сельскохозяйственная культура в процессе естественного или искусственного отбора выработала некие присущие именно ей требования, в рамках которых действие каждого фактора внешней среды будет либо благоприятным, либо нейтральным, либо неблагоприятным. Причем «степень неблагоприятности» внешних условий связана с

амплитудой отклонения любого из факторов среды от своего оптимального (эталонного) значения. Потенциальные же возможности растительного организма заложены в его «идеальном начале» – семени. Именно качество семенного материала определяет потенциал продуктивности сельскохозяйственной культуры.

Базируясь на изложенных выше общих исходных принципах, сформулируем математическое описание взаимодействий в системе «растение – окружающая среда». При этом представим формирование конечного урожая в виде пространства (динамичной сферы факторов окружающей среды), в центре которого находится «идеальное начало» – семенной материал с генетически обусловленным ходом развития. Причем, соответствие условий формирования конечного урожая требованиям растительного организма выразим, используя дифференциальное уравнение в частных производных

$$\frac{\partial^n Y}{\partial r_1 \partial r_2 \dots \partial r_i \dots \partial r_n} = Y_{pp} f(\bar{r}_1, \bar{r}_2, \dots, \bar{r}_i, \dots, \bar{r}_n) \quad (1)$$

где  $n$  – количество учитываемых факторов, влияющих на урожай сельскохозяйственной культуры;

$Y$  – урожай сельскохозяйственной культуры;

$\bar{r}_i$  – итоговый показатель  $i$ -го фактора окружающей среды;

$Y_{pp}$  – потенциально возможный урожай данной культуры, определяемый только внутренними свойствами «идеального начала» – качеством семенного материала;

$f(\bar{r}_1, \bar{r}_2, \dots, \bar{r}_n)$  – функция итоговых показателей учитываемых факторов, влияющих на развитие растений (степень воздействия окружающей среды на реализацию генетически заложенной в семенном материале программы развития).

## 2. Теоретическое представление модели урожая

Формула (1) записана в общем виде и требует конкретизации. Прежде всего следует уточнить структуру функции итоговых по-

казателей среды. Размерность этой функции определяется левой частью уравнения (1), из которой следует

$$f(\bar{r}_1, \bar{r}_2, \dots, \bar{r}_i, \dots, \bar{r}_n) = [\bar{R}]^{-1},$$

где  $\bar{R}$  – обобщенный показатель (ресурс) факторов окружающей среды.

Конечный урожай сельскохозяйственной культуры формируется в течение вегетации, последовательно проходя определенные фазы развития и накапливая результаты реакции растений на изменяющиеся условия среды. Поэтому функцию регулируемого фактора окружающей среды можно представить в виде отношения, характеризующего отклонения его итоговых фактических значений от итоговых эталонных (оптимальных).

Учитывая условие равенства размерностей, предложим интегральную запись данной функции

$$f(\bar{R}) = f(\text{grad } \bar{R}) = \int_{\bar{R}}^{\bar{R}_m} d\bar{R} \left( \int_0^{\bar{R}_m} \bar{R} d\bar{R} \right)^{-1}, \quad (2)$$

где  $\bar{R}_m$  – эталонное значение обобщенного показателя ресурсов, при котором создаются условия для получения потенциального (максимального) урожая.

Из соотношения (2) следует

$$f(\text{grad } \bar{R}) = 2 \bar{R}_m^{-2} (\bar{R}_m - \bar{R}). \quad (3)$$

Рассмотрим такой вариант агротехники, когда величину урожая определяет только уровень питания растений. Поэтому, в первом приближении, ограничим число рассматриваемых аргументов четырьмя главными факторами (основными факторами жизни растений), включая свет, тепло, влагу, пищу, считая, что газовый режим и другие неучитываемые параметры естественной среды обитания находятся в оптимуме. Причем, при рассмотрении функции (1) предположим, что она представлена разделяю-

щимися переменными. В этом случае из (1) с учетом (3) следует

$$\frac{\partial Y}{\partial F} = 2 Y_{PP} F_L(\bar{L}) f_T(\bar{T}) f_E(\bar{E}) \bar{F}_m^{-2} (\bar{F}_m - \bar{F}), \quad (4)$$

где  $\bar{L}$ ,  $\bar{T}$ ,  $\bar{E}$ ,  $\bar{F}$  – фактические итоговые значения показателей света, тепла, влаги, пищи, соответственно;

$\bar{F}_m$  – эталонное итоговое значение фактора питания растений, при котором формируется потенциально возможный (максимальный) урожай.

Уравнение (4) является дифференциальным представлением зависимости конечного урожая от обеспеченности растений в течение вегетации пищей. Из (4) несложно получить решение в явном виде

$$Y = Y_{PP} [f_L(\bar{L}) f_T(\bar{T}) f_E(\bar{E})] \left[ 1 - \left( 1 - \frac{\bar{F}}{\bar{F}_m} \right)^2 \right], \quad (5)$$

где  $Y$  – планируемый конечный урожай сельскохозяйственной культуры, определяемый качеством семенного материала (потенциально возможным урожаем), влиянием света, тепла, влаги на формирование урожая и соответствием фактора питания растений своему оптимальному значению.

Представим (5) в свернутой форме, соответствующей высокотехнологичным условиям возделывания сельскохозяйственной культуры:

$$Y = Y_{RP} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{\bar{F}}{\bar{F}_m} \right)^2 \right], \quad (6)$$

где  $Y_{RP}$  – реально возможный урожай при естественных освещенности, тепло- и влагообеспеченности, т. е.

$$Y_{RP} = Y_{PP} [f_L(\bar{L}) f_T(\bar{T}) f_E(\bar{E})]. \quad (7)$$

Заметим, что модель урожая, представленная в виде уравнения (6), может иметь несколько другой вид, идентичный (6):

$$y = y_{RP} \frac{\bar{F}}{F_m} \left( 2 - \frac{\bar{F}}{F_m} \right). \quad (8)$$

В качестве ресурсов внешней среды, используемых растительным организмом в процессе роста и развития, выступает множество факторов. Для того, чтобы обеспечить независимый учет каждого из них, исходное дифференциальное уравнение (1) выражено в частных производных. Для упрощения модели число рассматриваемых аргументов нами ограничено четырьмя главными (основными факторами жизни растений). Вместе с тем, когда речь идет о культуре, адаптированной (районированной) к конкретной окружающей среде, условия жизни растительного организма по освещенности и теплообеспеченности могут быть близкими к оптимальным и градиентами этих факторов можно пренебречь. Но при строгой постановке задачи их все же следует учитывать. Что касается газового режима, то будем считать его градиент близким в естественных условиях к единице, что позволяет не принимать во внимание этот фактор. Фактор влагообеспеченности, в свою очередь, достаточно динамичен, что также необходимо учитывать в расчетах.

Зависимости (6), (8) имеют одно следствие. Оно состоит в том, что при существенном увеличении (в нашей модели – при удвоении) значения рассматриваемого регулируемого фактора среды по сравнению с эталоном, происходит полная потеря урожая. Но здесь нет противоречия. Вполне объяснима гибель урожая от перегрева, переувлажнения растений, либо от значительной передозировки элементов питания.

Таким образом, выражения (6), (8) формализуют суммарное влияние основных урожаеобразующих факторов на конечный урожай сельскохозяйственной культуры. Однако необходимо уточнить, что культура, как живой организм, может погибнуть, так и не достигнув конечного урожая, т. е. фазы полной спелости. Следует каким-то образом учесть и координату времени.

Это возможно сделать, выразив расчетное отношение через функцию времени

$$\frac{\bar{R}}{R_m} = \frac{1}{H} \int_0^H \frac{r}{r_m} dh, \quad (9)$$

где  $h$  – координата времени ( $0 \leq h \leq H$ );

$H$  – продолжительность вегетации культуры до получения конечного урожая;

$r$  – текущее (на данный момент времени  $h$ ) значение обобщенного показателя ресурсов;

$r_m$  – текущее (на данный момент времени  $h$ ) эталонное значение обобщенного показателя ресурсов, при котором создаются условия для получения потенциального (максимального) урожая.

Согласно (9) можем записать

$$\frac{\bar{F}}{F_m} = \frac{1}{H} \int_0^H \frac{f}{f_m} dh, \quad (10)$$

где  $f_m, f$  – текущие (на данный момент времени  $h$ ) эталонные и фактические, соответственно, значения регулируемого фактора окружающей среды, в нашем случае – пищи.

Вместе с тем, по аналогии с (10) можно определить промежуточные относительные значения регулируемого ресурса

$$\frac{F}{F_m} = \frac{1}{h} \int_0^h \frac{f}{f_m} dh, \quad (11)$$

где  $F_m, F$  – суммируемые от начала вегетации и до текущего момента времени  $h$  эталонные и фактические, соответственно, значения регулируемого фактора окружающей среды – пищи.

Применение в расчетах по (6) соотношения (11) требует соответствующего уточнения функции (6), которое заключается в определении промежуточной части от величины потенциального урожая. Эту часть в первом приближении можно задать пропорционально текущему времени

$$y_{RP} = \frac{h}{H} Y_{RP}, \quad (12)$$

где  $y_{RP}$  – часть реально возможного урожая культуры, накопленная от начала вегетации до момента времени  $h$  ( $0 \leq y_{RP} \leq Y_{RP}$ ).

Следовательно, с помощью (11), (12) можно определить реально накопленный на момент времени  $h$  возможный (при высокой агротехнике) урожай

$$y = \frac{h}{H} Y_{RP} \left[ I - \left( I - \frac{F}{F_m} \right)^2 \right]. \quad (13)$$

где  $y$  – часть планируемого урожая культуры, накопленная от начала вегетации до момента времени  $h$  ( $0 \leq y_{RP} \leq Y_{RP}$ ).

Вместе с тем по аналогии можем записать

$$y = \frac{h}{H} Y. \quad (14)$$

С учетом (14) функция (13) приводится к форме, которая идентична уравнению (6), но отличается представлением аргумента

$$Y = Y_{RP} \left[ I - \left( I - \frac{F}{F_m} \right)^2 \right]. \quad (15)$$

Таким образом, согласно (15), на любой момент вегетации  $h$  по соответствующим относительным значениям ресурсов окружающей среды (11) можно определить не только его часть (13), накопленную за расчетный промежуток времени, но и ожидаемый конечный урожай сельскохозяйственной культуры (15).

Укажем, что уравнения (6), (13) и (15) при  $h = H$  полностью совпадают, т.е. становятся аналогами. Последний вывод позволяет избежать неопределенности, заключающейся в том, что продолжительность вегетационного периода для одной и той же культуры не является величиной постоянной по годам, определить которую с приемлемой точностью заранее в течение конкретного вегетационного периода просто невозможно. Следовательно, уравнение (15) можно считать ключевым в градиентной

модели урожая сельскохозяйственных культур, поскольку

$$\lim_{h \rightarrow H} \frac{R}{R_m} = \frac{\bar{R}}{\bar{R}_m}.$$

Подчеркнем, что при определении относительных значений ресурсов внешней среды по (11), т.е. при интегрировании, необходимо фиксировать совпадение значений текущих показателей среды с критическими отметками, приводящими к гибели растений. Если такое случается, то дальнейший расчет не имеет смысла по причине нулевого конечного урожая.

Формальное представление модели урожая, предложенное выше, не позволяет отнести полученные зависимости (6), (15) к классу строгих теоретических формул. Их вывод основан на упрощении (2) и допущении о разделении переменных. Вместе с тем наша модель не содержит эмпирических коэффициентов. Кроме того, все параметры модели имеют четкий физический смысл. Это позволяет также дистанцировать формулы (6), (8), (15) и от класса эмпирических моделей программирования урожаев. Поэтому назовем представленную модель «*градиентной моделью урожая*», указывая на присутствие в ней неких эталонных (опорных) значений показателей окружающей среды, с которыми количественно сравниваются фактические значения показателей. Результаты этого сравнения и определяют конечный урожай сельскохозяйственной культуры.

Еще раз подчеркнем, что речь пока идет о земледелии на фоне высокой агротехники, когда урожай зависит только от основных факторов внешней среды и создаваемого уровня питания. Ясно, что чем больше факторов внешней среды включается в расчет, тем более изменчивым по годам будет его результат. Эту закономерность можно выразить следующими соотношениями

$$Y_{pp} = const, \quad (16)$$

$$Y_{rp}, \dots, Y^i \neq const. \quad (17)$$

Для создателей новых сортов и гибридов сельскохозяйственных культур весьма важным является определение потенциальных урожаев. Высший стандарт урожая – потенциально возможный ( $Y_{PP}$ ) – определяется только внутренними (генетическими) свойствами семенного материала. Производные уровни урожайности, в том числе  $Y_{RP}$ , изменчивы по годам и будут зависеть от условий конкретного года, что и отражено в соотношении (17).

### **3. Адаптация градиентной модели урожая к реальным условиям**

Для полного подтверждения справедливости модели необходимо доказать совпадение результатов расчета с результатами полевого опыта. Выше подчеркивалось, что модель урожая, формализующая его зависимость от регулируемых факторов (в качестве примера рассмотрен уровень питания растений), справедлива только для случая высокой агротехники, когда все урожаесохраняющие факторы (техника и технологии обработки, защита растений, режим доставки, хранения и пр.) не снижают конечный урожай. В реальных условиях необходимо учесть неоптимальность агротехники, потери продукции при перевозках, хранении и т. п.

Здесь необходимо уточнить, о каком урожае следует вести речь: о бункерном, амбарном или экономическом (реализованном потребителем). В принципиальном плане градиентная модель урожая не содержит ограничений по количеству урожаесохраняющих факторов, поэтому можно рассматривать любой уровень урожая. Но правильнее, на наш взгляд, остановиться на урожае, величина которого зависит только от основных факторов жизни растений и условий агротехники.

Еще раз приведем иерархию участвующих в модели урожаев, начиная с самого высокого: потенциально возможный ( $Y_{PP}$ ) → ... → реально возможный ( $Y_{RP}$ ), → ... → планируемый ( $Y$ )... Каждый урожай более низкого уровня учитывает неоптимальность какого-то одного (или нескольких) основных факторов жизни растений. Причем перечень (очередность) этих факторов мы увязали с иерархией урожаев:  $Y_{PP}$  (потенциал продуктивности) → ... →  $Y_{RP}$  (потенциал продуктивности + влияние освещенности + влияние теплового режима + влияние влагообеспеченности) →  $Y$

(потенциал продуктивности + влияние освещенности + влияние теплового режима + влияние влагообеспеченности + влияние пищевого режима) → ...

Вместе с тем, исследовать влияние любого фактора жизни растений на урожай в полевых условиях, что представляет наибольший практический интерес, можно только зафиксировав на каком-то уровне все остальные факторы. Здесь мы повторяем одно из требований методики полевого опыта – необходимость соблюдения «принципа однофакторного различия».

Учесть данное требование можно, введя в иерархию урожаев величину, не связанную жестко с каким-либо фактором окружающей среды. Причем, поскольку необходимость подобной адаптации модели урожая связана с ожидаемыми условиями вегетации растений, назовем этот опорный уровень урожайности – «реально достижимый урожай».

Математически это допущение можно выразить следующим образом

$$Y = Y_{RA} \left[ I - \left( I - \frac{R_n}{R_{mn}} \right)^2 \right], \quad (18)$$

где  $Y$  – планируемый (расчетный) урожай;

$Y_{RA}$  – реально достижимый урожай;

$R_n$  – исследуемый (n-й) фактор жизни растений;

$R_{mn}$  – значение n-го фактора, обеспечивающее получение реально достижимого урожая.

В выражении (18) учтено требование однофакторного различия, когда результат действия всех остальных (неисследуемых) факторов включен в опорный уровень урожая ( $Y_{RA}$ ).

В принципе, при уверенности в справедливости предложенной модели ничто не мешает одновременному изучению воздействия на урожай нескольких факторов, например, двух и т. д.

$$Y = Y_{RA} \left[ I - \left( I - \frac{R_{n-1}}{R_{m(n-1)}} \right)^2 \right] \left[ I - \left( I - \frac{R_n}{R_{mn}} \right)^2 \right]. \quad (19)$$

Однако прежде следует убедиться в том, что эта модель не противоречит имеющимся результатам полевых опытов. Поэтому, используя формальное представление градиентной модели урожая в условиях реальной агротехники (18), проведем ее идентификацию по одному фактору.

#### **4. Идентификация градиентной модели по результатам полевых исследований влияния удобрений на урожай**

К настоящему времени в Беларуси получено достаточно много опытных данных, характеризующих связь величины конечного урожая сельскохозяйственной культуры с дозой вносимых удобрений. С учетом предложенной выше схемы адаптации градиентной модели к реальным условиям можем ее представить с выделением фактора питания растений:

$$Y = Y_{RA} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{F}{F_m} \right)^2 \right], \quad (20)$$

или

$$Y = Y_{RA} \frac{F}{F_m} \left( 2 - \frac{F}{F_m} \right). \quad (21)$$

Формулы (20), (21) позволяют определить ожидаемый (планируемый) уровень урожайности сельскохозяйственной культуры в зависимости от уровня питания растений в условиях реальной (не идеальной) агротехники. Вместе с тем, в научной литературе встречается несколько иная аппроксимация зависимости урожая от уровня минерального питания. Достаточно высокие корреляционные характеристики имеет полином второй степени (парабола) [2, 4 и др.]

$$Y(f) = a_0 + a_1 f - a_2 f^2, \quad (22)$$

где  $Y(f)$  – фактически полученный урожай, как функция внешней дозы удобрений, ц/га;

$f$  – суммарная доза вносимых удобрений (NPK), кг д.в./га;

$a_0, a_1, a_2$  – коэффициенты уравнения регрессии, определяемые эмпирическим (опытным) путем. Размерности этих коэффициентов различны:  $[a_0] = \text{ц/га}$ ;  $[a_1] = \text{ц/кг д.в.}$ ;  $[a_2] = \text{ц. га/(кг д.в.)}^2$ .

В свою очередь, в нормативном документе [3] связь урожая с уровнем питания растений предполагается линейной, пропорциональной дозе удобрений. Противоречие линейной аппроксимации с ее криволинейным аналогом (22) снимается, если ограничить область определения линейной функции  $Y(f)$  небольшим участком, на котором часть параболы (22) можно заменить прямой, что и принято в действующих нормативах. Однако криволинейная функция второго порядка, безусловно, всегда будет более общим (чем прямолинейное) и более точным представлением связи урожая с дозой вносимых удобрений.

Сравним эмпирическую зависимость (22) с градиентной моделью урожая (20), (21). Их объединяет то, что эти уравнения являются кривыми второго порядка. Докажем, что эти кривые идентичны.

В качестве аргумента в функции (20), (21) фигурирует уровень питания растений ( $F$ ). Он складывается из двух составных частей: исходного почвенного плодородия и дозы NPK. Эту особенность учтем через соответствующее суммирование

$$F = f_0 + f, \quad (23)$$

где  $f_0$  – уровень почвенного плодородия, выраженный через исходное содержание в почве (до внесения удобрений) усвояемых форм элементов питания растений, кг д.в./га.

С учетом (23) уравнение (20) принимает вид

$$Y = Y_{RA} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{f_0 + f}{F_m} \right)^2 \right]. \quad (24)$$

Аналогом (24) является выражение, полученное тем же путем из (21)

$$Y = Y_{RA} \frac{f_0 + f}{F_m} \left( 2 - \frac{f_0 + f}{F_m} \right). \quad (25)$$

Представим (24) в развернутой форме

$$Y = Y_{RA} \frac{f_0}{F_m} \left( 2 - \frac{f_0}{F_m} \right) + 2 Y_{RA} \frac{f}{F_m} \left( 1 - \frac{f_0}{F_m} \right) - Y_{RA} \left( \frac{f}{F_m} \right)^2. \quad (26)$$

Сравнивая (26) с эмпирической зависимостью (22), можем записать

$$a_0 = Y_{RA} \frac{f_0}{F_m} \left( 2 - \frac{f_0}{F_m} \right), \quad (27)$$

$$a_1 = Y_{RA} \frac{2}{F_m} \left( 1 - \frac{f_0}{F_m} \right), \quad (28)$$

$$a_2 = Y_{RA} F_m^{-2}. \quad (29)$$

В соответствии с (25) найдем, что за счет естественного плодородия почвы (без внесения удобрений) получим урожай, равный

$$Y_0 = Y_{RA} \frac{f_0}{F_m} \left( 2 - \frac{f_0}{F_m} \right), \quad (30)$$

где  $Y_0$  – урожай сельскохозяйственной культуры, выращенный за счет естественного почвенного плодородия, ц/га.

Следовательно, справедливым является тождество

$$a_0 \equiv Y_0. \quad (31)$$

Из (25), (31) можно выделить прибавку урожая, получаемую от вносимых удобрений. При этом примем

$$Y = Y_0 + DY_f, \quad (32)$$

где  $DY_f$  – прибавка урожая от внесения удобрений, ц/га.

С учетом (32)

$$DY_f = Y_{RA} \frac{f}{F_m} \left[ 2 \left( 1 - \frac{f_0}{F_m} \right) - \frac{f}{F_m} \right]. \quad (33)$$

Таким образом мы доказали, что градиентная модель урожая (20), (21) идентична эмпирическому уравнению (22), увязывающему

урожай с дозой вносимых удобрений. Для подтверждения данного вывода выразим параметры градиентной модели через эмпирические коэффициенты зависимости (22)

$$f_0 = \frac{1}{2a_2} \left( \sqrt{4a_0a_2 + a_1^2} - a_1 \right), \quad (34)$$

$$F_m = \frac{1}{2a_2} \left( \sqrt{4a_0a_2 + a_1^2} \right), \quad (35)$$

$$Y_{RA} = \frac{1}{4a_2} (4a_0a_2 + a_1^2). \quad (36)$$

Формулы (34) – (36) получены путем совместного решения уравнений (22), (27) – (29). Они позволяют по известным эмпирическим коэффициентам  $a_0, a_1, a_2$  в (34) определить параметры градиентной модели урожая  $Y_m, F_m, f_0$ .

По результатам выполненного анализа можно считать доказанным, что многочисленные, в том числе приведенные в [4], экспериментальные данные, связывающие урожай с дозой вносимых удобрений, с высокой вероятностью (коэффициент корреляции (22), вычисленный для большого массива опытных данных [2, 4], превышает 0,7) подтверждают справедливость предложенной градиентной модели урожая для условий Беларуси. Разброс экспериментальных точек объясняется тем, что анализируемые годы различаются по тепло- и влагообеспеченности. Это отмечено в условии (17). При обосновании эмпирической зависимости (22) поле экспериментальных точек было осреднено, т.е. заведомо было принято

$$Y_{RA} \approx const. \quad (37)$$

Однако следует заметить, что без упрощения (37) получить эмпирическую связь (22) было бы просто невозможно. В свою очередь, использование модели (14), (24) позволяет определить возможный и достижимый урожай сельскохозяйственной культуры и выстроить иерархию их производных по известным показателям тепло- и влагообеспеченности вегетационных периодов анализируемых лет. В этом проявляется одно из достоинств предложенной модели.

Используя полученные конверторы (34) – (36) вычислим, для примера, опорные показатели градиентной модели урожая для сельскохозяйственных культур, по которым получены эмпирические коэффициенты в формуле (22) [4]. Результаты расчета представлены в таблице. При этом примем

$$f_m = F_m - f_0, \quad (38)$$

$$D Y_m = Y_{RA} - Y_0, \quad (39)$$

$$D Y_{f_m} = \frac{D Y_m}{f_m} = \frac{Y_{RA} - Y_0}{f_m}, \quad (40)$$

где  $f_m$  – максимально приемлемая доза внесения НРК, при которой можно получить максимальный урожай, кг д.в./га;

$D Y_m$  – максимально возможная прибавка урожая от вносимых удобрений, ц/га;

$D Y_{f_m}$  – окупаемость максимально приемлемой дозы удобрений прибавкой урожая, ц/га · кг д.в.

Следует заметить, что конверторы (34) – (36) можно получить, проведя математический анализ эмпирической зависимости (22). Действительно, вычислив первую производную (22) по дозе вносимых удобрений, приравняв ее нулю, получим максимально приемлемую дозу внесения НРК, при которой можно получить максимальный урожай, т.е.

$$\frac{d(a_0 + a_1 f - a_2 f^2)}{df} = a_1 - 2 a_2 f_m = 0.$$

Следовательно

$$f_m = \frac{a_1}{2 a_2}. \quad (41)$$

Аналогичную формулу получим, решая совместно (38), (24) и (25).

Подставив значение (41) в эмпирическое уравнение (22), найдем

$$Y_{RA} = a_0 + a_1 f_m - a_2 f_m^2,$$

или

$$Y_{RA} = a_0 + \frac{a_1^2}{4a_2}. \quad (42)$$

Формула (42) идентична (36), но записана несколько компактнее.

Используя тождество (31) и зависимость (39), получим

$$D Y_m = \frac{a_1^2}{4a_2} = a_2 f_m^2. \quad (43)$$

Результат (43) указывает на квадратичный рост возможной прибавки урожая от максимально приемлемой дозы внесения НРК при снижении исходного уровня почвенного плодородия.

В свою очередь, исходный уровень почвенного плодородия можно определить, представив (22) в виде

$$a_0 + a_1 f_0 - a_2 f_0^2 = 0.$$

Из последнего уравнения несложно найти его положительный корень

$$f_0 = \frac{1}{2a_2} \left( \sqrt{4a_0 a_2 + a_1^2} - a_1 \right).$$

Полученное решение полностью повторяет уже известный результат (34).

Складывая (34) и (41), получаем формулу (25)

$$F_m = f_0 + f_m = \frac{1}{2a_2} \sqrt{4a_0 a_2 + a_1^2}.$$

Используя (35) и (42), найдем аналог (42)

$$Y_{RA} = a_2 F_m^2. \quad (44)$$

Следовательно, справедливо соотношение

$$\frac{D Y_m}{Y_{RA}} = \left( \frac{f_m}{F_m} \right)^2. \quad (45)$$

В соответствии с (45) относительная прибавка максимального урожая равна квадрату отношения максимальной дозы NPK к эталонному значению уровня питания растений.

Таким образом, анализируя эмпирическую зависимость (22), мы не только получили конверторы (34) – (36) для определения значений опорных показателей модели (20), (21), но и пришли к нетривиальным выводам (43) – (45). Выполненный анализ полностью подтвердил обоснованность частной формы градиентной модели урожая (20), (21). Вместе с тем расчеты (см. таблицу) показали слабые стороны представленной в [4] эмпирической формулы (22). Прежде всего это касается значений коэффициента  $a_2$ . Их необходимо определять с точностью до трех значащих цифр. С аналогичной точностью следует определять все коэффициенты в (22). Поскольку от величины  $a_2$  существенно зависят значения всех опорных показателей градиентной модели (20), (21), будем считать представленные в [4] значения эмпирических коэффициентов весьма приближенными, требующими уточнения, что, соответственно, сказалось и на приведенных в таблице результатах расчета.

**Расчет опорных показателей градиентной модели урожая для различных сельскохозяйственных культур по данным [4]**

Сельскохозяйственная культура	Эмпирические коэффициенты			Опорные показатели градиентной модели					Прибавка урожая	
	$a_0$ , ц/га	$a_1$ , ц/кг д.в	$a_2$ , ц.га/ (кг д.в.) <sup>2</sup>	$f_0$ , кг д.в./га	$Y_0$ , ц/га	$F_m$ , кг д.в./га	$Y_{RA}$ , ц/га	$f_m$ , кг д.в./га	$DY_m$ , ц/га	$DY_{fm}$ , ц/га кг д.в
Картофель	202,3	0,397	0,00039	373	202	882	303	509	101	0,200
Морковь	383,6	0,469	0,00120	403	383	598	429	195	46,0	0,231
Сахарная свекла	356,0	0,454	0,00030	569	356	1326	528	757	172	0,227
Озимая рожь	21,3	0,115	0,00012	158	21,3	637	48,8	479	27,5	0,057
Пшеница	21,4	0,081	0,00020	182	21,4	385	29,6	203	8,2	0,040
Тритикале	34,4	0,120	0,00020	212	34,4	512	52,4	300	18,0	0,060
Ячмень	19,9	0,124	0,00010	145	19,9	765	58,4	620	38,4	0,062
Овес	26,2	0,068	0,00010	274	26,2	614	37,8	340	11,6	0,034

Вторым частным выводом, вытекающим из табл. 1, является существенно большая окупаемость НРК на овощных культурах по сравнению с зерновыми (более чем в 4 раза). Кроме того, среди зерновых наименьшей окупаемостью удобрений отличается овес, а наибольшей – ячмень и тритикале.

### **5. Оценка градиентной модели по фактору влагообеспеченности**

Кроме удобрений на урожай сельскохозяйственной культуры влияют и другие факторы. Можно ли все это влияние сводить к градиентной форме, подобной (20), (21)? Данный вопрос можно сформулировать иначе. Например, правомочно ли функцию градиента любого фактора внешней среды сводить к простейшей квадратичной (параболической) зависимости.

Для ответа на поставленный вопрос обратимся к литературе. Как уже отмечалось, достаточно скрупулезный количественный анализ влияния факторов внешней среды на урожай сельскохозяйственных культур выполнил Э.Н. Шкутов [4]. В указанной работе доказана квадратичная форма влияния на урожай не только удобрений, но и средств защиты растений, которые можно отнести не к урожаяобразующим, а к урожаясохраняющим факторам. Кроме того, там же показано наличие точно такой же связи урожая с наличием техники для посева, обработки почвы и растений, уборки урожая [4].

Помимо указанных факторов в литературе достаточно часто встречается анализ влияния орошения на урожай сельхозкультур. Некоторое обобщение опытных данных по искусственному поливу приведено в [1]. Там же указано, что еще классик гидромелиоративной науки А.Н. Костяков связывал водопотребление растений с урожаем, предложив зависимость

$$E = K_E U, \quad (46)$$

где  $E$  – водопотребление (эвапотранспирация) сельскохозяйственного поля;

$K_E$  – коэффициент водопотребления;

$U$  – урожай сельскохозяйственной культуры.

Используем формулу А.Н. Костякова (46) для оценки градиентной модели, представленной в виде (19). Определим, что

$$\frac{E}{K_E} = Y_{MP} \frac{EF}{E_m F_m} \left( 2 - \frac{E}{E_m} \right) \left( 2 - \frac{F}{F_m} \right), \quad (47)$$

где  $Y_{MP}$  – максимально возможный урожай.  
Однако, в соответствии с (46)

$$K_{Em} = \frac{E_m}{Y_{MP}}, \quad (48)$$

где  $K_{Em}$  – коэффициент водопотребления при получении максимально возможного урожая.

С учетом (48) зависимость (47) примет вид

$$\frac{K_{Em}}{K_E} = \frac{F}{F_m} \left( 2 - \frac{E}{E_m} \right) \left( 2 - \frac{F}{F_m} \right). \quad (49)$$

В условиях орошения (при оптимальной влагообеспеченности) последнее соотношение существенно упрощается

$$\frac{K_{Em}}{K_E} = \frac{F}{F_m} \left( 2 - \frac{F}{F_m} \right). \quad (50)$$

Формы связи (49), (50) также сведены к квадратичному уравнению, что, собственно, и вытекает из опытных данных, приведенных в [1].

Таким образом, помимо фактора питания растений (удобрений) квадратичная форма влияния на урожай подтвердится еще для такого урожаеобразующего фактора, как влага. А учитывая выводы [4], она справедлива и для нескольких урожае-сохраняющих факторов (применение средств защиты растений и работа сельскохозяйственной техники). Подобные совпадения вряд ли можно назвать случайными, что позволяет с достаточно высокой долей уверенности рекомендовать предложенную градиентную модель урожая сельскохозяйственной культуры для дальнейшей апробации по опытным данным и для прямого применения при анализе результатов полевых исследований, а также при их планировании.

*Литература*

1. Лихацевич А.П., Стельмах Е.А. Оценка факторов, формирующих неустойчивую влагообеспеченность сельскохозяйственных культур в гумидной зоне (на примере Беларуси, Центрального и Волго-Вятского регионов Российской Федерации). – Мн.: ООО «Белпринт», 2002. – 212 с.
2. Семененко Н.Н. Прогрессивные системы применения азотных удобрений. – Мн.: Хата, 2003. – 162 с.
3. Справочник нормативов трудовых и материальных затрат для ведения сельскохозяйственного производства: 2-е изд., перераб. и доп. / Под ред. В.Г. Гусакова. Сост. Я.Н. Бречко, М.Е. Сумонов. – Мн.: БелНИИ аграрной экономики, 2002. – 440 с.
4. Шкутов Э.Н. Определение расчетного уровня урожайности сельскохозяйственных культур на мелиоративных системах. // Мелиорация переувлажненных земель. Сб. науч. работ БелНИИМиЛ. Т. 50. – 2003. – С. 48-63.

*Резюме*

Анализируются взаимосвязи в системе «растение – окружающая среда». Выделяются опорные (эталонные) значения регулируемых показателей среды, на основе которых строится модель урожая, которая количественно учитывает влияние наиболее динамичных факторов жизни растений (влаги, пищи). Выполнена идентификация градиентной модели по результатам полевых исследований влияния удобрений на урожай. Показано ее соответствие данным опытов по связи урожая с уровнями водопотребления сельскохозяйственных культур, а также защиты растений и технической оснащенности сельскохозяйственного производства.

**Ключевые слова:** урожайность, моделирование, водопотребление, экология, удобрения.

*Summary*

**Likhatsevich A. Influence model of controlled environment factors upon crop yield.**

The interdependences in the system «a plant-environment» are examined. The reference (standard) values of controlled factors of environment are picked out, these are the basis for creation of the crop yield model, which takes into account quantitatively influence of the most dynamical factors of plants life (moisture, nutrition). The identification of gradient model by results of field investigations of influence of fertilizers on a crop yield is carried out. Its correspondence to experimental data on interdependence of a crop yield with levels of a water consumption by crops, and also plant protection and technical equipment of an agricultural production is shown.

**Key words:** crop yield, simulation, water consumption, ecology, fertilizing.