

МЕЛИОРАЦИЯ

УДК 631.6

ПРОБЛЕМЫ ЗАДАНИЯ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ МЕЛИОРАТИВНЫХ СИСТЕМ

Н.К. Вахонин, кандидат технических наук
РУП «Институт мелиорации»

Ключевые слова: мелиоративный сельскохозяйственный объект, водный режим, моделирование, уравнения в частных производных, входные воздействия, граничные условия, методика проектирования

Анализ проблемы

Моделирование в мелиорации базируется, прежде всего, на моделировании водного режима во всех взаимосвязанных подсистемах мелиоративного сельскохозяйственного объекта (МСХО): мелиоративная сеть, мелиорируемая территория, сельскохозяйственная растительность, изменяемая окружающая среда, формируемого всеми приходными и расходными водобалансовыми составляющими, основными из которых являются сток, испарение, осадки. Это связано с тем, что динамика воды, важнейшего для формирования урожайности сельскохозяйственных культур фактора, одновременно определяет и динамику остальных урожаеобразующих факторов: воздуха в почве (в идеале динамика водно-воздушной среды должна моделироваться совместно), перенос тепла, питательных элементов и химических элементов загрязнителей во всех подсистемах МСХО. При этом в подсистемах МСХО имеет место динамика воды различного гидравлического типа: русловые и фильтрационные потоки в напорном и безнапорном режимах, пленочные течения, струи, капли.

Непосредственное влияние на водный режим мелиоративная сеть оказывает через формирование стока. Моделирование её осушительного действия является одной из наиболее сложных задач при прогнозировании водного режима МСХО.

В строгой постановке водный режим МСХО (осушительное действие мелиоративной сети) описывается дифференциальными уравнениями с распределенными параметрами. Для грунта наиболее строгим является трехмерное уравнение влагопереноса. Однако для практических задач оптимизации МСХО нереально идентифицировать входящие в него параметры. Поэтому целесообразно использовать для моделирования грунтовых вод двухмерное уравнение Буссинеска (1), а для моделирования свободных потоков в каналах, дренах, по поверхности территории – уравнения Сен-Венана (2) и их частные случаи (для напорного режима, пренебрежения инерционными членами) [1]. Для расчетов по этим уравнениям необходимы те же параметры, что используются при ста-

рой методике проектирования с использованием упрощенных зависимостей [2] (коэффициенты фильтрации и водоотдачи грунта, размеры слоёв, коэффициенты шероховатости). Они могут определяться либо непосредственными измерениями при изысканиях, либо путем решения на моделях обратной некорректной задачи идентификации параметров, используя данные мониторинга уровней и расходов.

$$m \frac{\partial H_{ap}}{\partial \phi} = \frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial H_{ap}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(T \frac{\partial H_{ap}}{\partial y} \right) + e + \varepsilon (H_{нан} - H_{ap}) \quad (1)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial y} = q \\ - \frac{\partial H_*}{\partial y} = \frac{1}{g} \frac{\partial(Q/\omega)}{\partial t} + \frac{Q}{\omega g} * \frac{\partial(Q/\omega)}{\partial y} + \frac{gQ}{g\omega^2} - i + \frac{Q|Q|}{K^2} \end{cases} \quad (2)$$

где μ – коэффициент водоотдачи грунта;

H_{ap} – уровень грунтовых вод над плоскостью отсчета;

T – проводимость пласта, зависящая от мощности слоев и их коэффициентов фильтрации – $T = \sum k_{ap_i} m_i$ ции,

$k_{ap_i} m_i$ – коэффициенты фильтрации и мощности слоев осушаемого грунта;

ε – инфильтрация на УГВ;

$\varepsilon = \frac{k_{вод}}{m_{вод}}$ – коэффициент перетока из нижележащего пласта через водоупор (напорное питание);

$k_{вод}, m_{вод}$ – коэффициент фильтрации и мощность водоупорной прослойки;

$H_{нан}$ – напор в водоносном слое под водоупорной прослойкой;

Q – расход воды в водотоке;

$K = \omega C \sqrt{R}$ – расходная характеристика потока;

ω – площадь поперечного сечения потока;

C – коэффициент Шези;

R – гидравлический радиус потока;

$H_в$ – глубина воды в открытом русле;

i – уклон дна водотока.

Уравнения Буссинеска и Сен-Венана, описывающие неустановившееся неравномерное движение воды, основаны на законе сохранения массы в движущемся потоке и связи расхода с градиентом напора вдоль него: линейной в соответствии с законом Дарси для ламинарного фильтрационного потока и по квадратному корню в соответствии с формулой Шези для турбулентных русловых потоков (строго говоря, в уравнении Сен-Венана член, учитывающий трение, должен меняться от Q/K до Q^2/K^2 в зависимости от режима движения –

изменения его от ламинарного до турбулентного от истока до устья канала). При этом уравнение Буссинеска представляет дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка параболического типа, а уравнения Сен-Венана – гиперболического типа. Уравнения требуют для замыкания по одному граничному условию на каждой границе потока.

При турбулентном режиме с пренебрежением инерционными членами уравнение Сен-Венана упрощается до уравнения динамических волн.

При ламинарном режиме инерционными членами в уравнении Сен-Венана можно пренебречь, в результате чего получить абсолютный аналог уравнения Буссинеска, но с $\mu=1$.

Решение уравнений осуществляется численно с использованием различных численных методов (конечных разностей, конечных элементов), реализация которых представляет собой достаточно сложное приложение. Наиболее сложна программная реализация модели, включающей совместное решение уравнений Буссинеска и Сен-Венана.

Отграничение МСХО от внешней среды, как проблема задания входных воздействий с границы системы

Выделенные выше подсистемы определяют границы МСХО семантически. Однако, главная сложность - выделить его пространственную границу (область моделирования), с которой будут задаваться входные воздействия из внешней среды при моделировании водного режима. Выделение системы из окружающей среды является основной проблемой системного анализа, что в особенности сильно проявляется в МСХО. Это связано с тем, что движущаяся вода представляет собой неразрывную сплошную среду во взаимосвязанных сложными транзитивными цепочками прямых и обратных связей подсистемах МСХО. При этом физически эта граница условна, т.к. окружающая среда представляет собой продолжение все тех же компонент самого МСХО только в естественно-природном состоянии: земля, водотоки, растительность, с неразрывностью движущейся в них водной среды, заполняющей грунт, дрены, водотоки, водоемы, возмущение которой в некотором месте распространяется с конечной скоростью по всей этой цепочке по площади МСХО.

В связи с этим моделировать МСХО необходимо как единое целое, т.е. необходимо **единой системой** уравнений описывать течение жидкости, используя уравнения (1) и (2) на всей его площади и рассчитывать её динамику сразу во всей цепочке грунт–дрены–водотоки–водоемы и т.п.

Однако именно вот в этом термине «по всей площади» и заключается сложность в отделении МС от окружающей среды, так как не ясно, где эта «вся площадь» заканчивается и именно это надо определить.

Следует подчеркнуть, что выбор пространственной границы принципиально отличается для двух случаев утилитарного предназначения моделирования: для прогнозиро-

вания водного режима для конкретного существующего варианта системы и для разработанной новой методологии проектирования [1, 3] - оптимизации структуры и параметров системы на экономико-экологические цели, основанной на проигрывании водного режима для ряда альтернативных вариантов системы и выбора из них обеспечивающего максимум дохода от урожаев при минимуме затрат на создание (реконструкцию) и использование МСХО.

Это связано с тем, что с границы задаются входные воздействия на МСХО из внешней среды (именно в этом и заключается её смысл при моделировании), реализация чего для этих случаев различна.

В первом случае граничные условия могут задаваться непосредственно по геометрическим границам МСХО, т.е. пространственно можно ограничить моделируемую территорию именно той площадью, на которой проложена регулирующая сеть, используя в качестве входных воздействий имеющиеся ряды наблюдений за уровнями и расходами на этой границе. В принципе в этом случае может отдельно моделироваться любая замкнутая часть системы при условии наличия по её периметру рядов мониторинговых наблюдений за уровнями (расходами), необходимых для задания граничных условий.

При моделировании альтернативных вариантов для проектирования системы принятие границы непосредственно по мелиоративной сети неточно, т.к. водный режим в ней (уровни и расходы воды) сам зависит от УГВ на осушаемой территории, моделирование которых и должно осуществляться с использованием этих граничных условий. При этом очевидно, что динамика входных воздействий будет своя для каждого варианта параметров мелиоративной сети. В связи с этим априори, независимо от динамики воды в самой системе входные воздействия на этой границе задать нельзя.

Это вынуждает при проектировании пространственно расширять границы рассчитываемой (моделируемой) области в сравнении с границами непосредственно мелиорируемой территории до такого удаления, на котором влияние проектируемой мелиоративной системы после её реализации на формировавшиеся до её создания уровни и расходы воды окажется пренебрежимо малым, т. е. однородность их ранее измеренных рядов практически не изменится.

Именно по причине нарушения однородности предшествующих рядов неправильно использование в качестве базисных входных данных расчетной обеспеченности модулей стока по принятым рекам-аналогам, на чем основывалась прежняя методика проектирования, так как с созданием сети она изменится (непосредственно для изменения стока и осуществляется мелиорация), причем в случае реализации различных возможных вариантов каждому из них соответствуют свои изменения стока. Поэтому проектирование, основанное на расчетной обеспеченности модулей стока $P_{q\%}$ и нормативно принимаемых уровнях (УГВ, УВК) $H_{норм}$ их пропуска неточно, а также принципиально не позволяет осуществлять многовариантные расчеты для выбора экономически оптималь-

ных (так как задание $P_{q\%}$ и $H_{норм}$ однозначно определяет параметры мелиоративной сети), что и потребовало не совершенствования, а разработки принципиально другой методологии проектирования [1, 3].

Очевидно, что принятие внешней границы в определенном смысле эвристично, хотя частично это можно учесть путем итеративного расчета системы: замоделировать динамику воды строго в пределах непосредственно осушаемой территории, а также при всё более широких границах (более общих надсистемах, рис.1), остановившись на той, на которой осушительное воздействие проектируемой системы на внешние, используемые в качестве граничных условий (ГУ) входные воздействия практически не сказывается.

Часть окружающей мелиоративный объект среды (земля, водотоки), расположенная между границей непосредственно мелиорируемой территории и этой условно принятой границей распространения влияния мелиорации, и является одной из входящих в МСХО подсистем - *изменяемая окружающая среда* (ИОС), пространство которой вынужденно необходимо включать в область моделирования совместно с непосредственно мелиорируемой территорией.

Главным условием принятия внешней границы является также наличие на ней рядов данных предшествующих наблюдений (уровни грунтовых вод, уровни воды в водотоках, расходы), которые необходимы для обоснованного задания входных воздействий для моделирования водного режима МСХО.

Следует отметить, что входные воздействия на моделируемую систему с выделенной границы теоретически могут задаваться двумя способами:

1) **детерминированно** – для чего необходимо одновременно с МСХО моделировать и его надсистему «внешняя среда». При этом, выбор этой новой более широкой границы и проблема задания входных воздействий (детерминированно или стохастически) остается точно такой же, как и непосредственно для МСХО, только влиянием создаваемой системы на их формирование можно пренебречь с большей степенью точности.

Рекурсивно эти проблемы повторяются при расширении области моделирования до надсистемы любой степени вложенности (рис.1). Поэтому строго детерминированное без допущений задание входных воздействий имеет место в редких случаях консервативных (не взаимодействующих с внешней средой) систем типа водосборного бассейна водоема с замкнутой водосборной площадью, внешняя граница которого является границей непротекания с детерминированным граничным условием $Q|_r = 0$ и в сечениях с разрывом сплошности воды (свободное падение воды из вышележащего сечения в ниже расположенное).

При этом надо учитывать, что с расширением границы и соответствующим увеличением моделируемой площади резко возрастают затраты на сбор информации, сложность (возможность) осуществления численных расчетов, возрастают вычислительные ошибки.

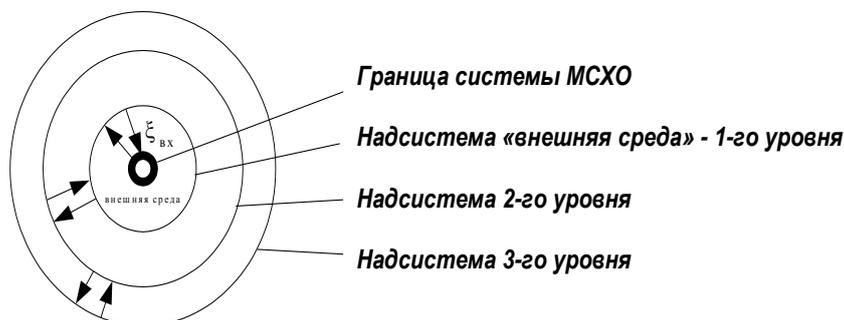


Рис.1. Система Мелиоративный сельскохозяйственный объект и границы надсистем «внешняя среда» различного уровня вложенности

Поэтому при выборе границы следует стремиться не к надсистеме наиболее общего порядка, а необходимо находить самые слабые обратные связи между надсистемами какого-то уровня, что позволяет наиболее точно прогнозировать входные воздействия на внутреннюю систему.

2) **стохастически** – используя ряды наблюдений на выделенной в соответствии с вышеизложенным границе, до строительства системы, учитывая то, что их однородность после её строительства не нарушится в силу слабых воздействий со стороны проектируемой системы на внешнюю среду.

В этом случае проектирование параметров представляет собой задачу стохастической оптимизации. При этом возможны два способа использования имеющихся рядов наблюдений в качестве входных воздействий в математической модели объекта: непосредственно как они имели место быть в прошлом (что предполагает буквальное их повторение на проектный период работы МСХО) или же используя полученные посредством их статистической обработки кривые вероятности и сгенерированные на их основе методом Монте-Карло ряды с подобными статистическими характеристиками. Предельно схематизированным (модельным) является вариант задания входного воздействия неизменным во времени, например, соответствующего некоторому проценту обеспеченности (среднепогодного или критического 10%, 5% и т.п.).

Исходя из вышеизложенного следует вывод, что **при моделировании МСХО в конечном итоге неизбежно задание входных воздействий стохастически.**

Следует также учитывать, что входные воздействия на МСХО со стороны надсистемы могут измениться не только в связи с его влиянием на неё, но и из-за влияния других систем. К примеру, входные погодно-климатические воздействия на проектируемую систему могут измениться со временем в связи с техногенными изменениями атмосферы человеком. В этих условиях однородность ранее фиксировавшихся рядов наблюдений нарушится, и использование их для статистического задания входных воздействий на МСХО станет неточным.

Здесь остается два варианта – либо оптимизация системы в условиях неопределенности, либо моделирование изменившейся надсистемы с целью детерминированного определения её воздействия на моделируемую систему. Последнее представляет собой проблему чрезвычайной сложности в силу большой размерности задачи, нелинейности и некорректности такой системы как атмосфера Земли, детерминированный прогноз которой на продолжительный период невозможен в принципе.

Отделить систему от окружающей среды тем сложнее, чем более единообразна среда, в которой происходит динамика фазовых переменных, и чем более связано (неразрывно) вещество, которое в ней движется, то есть сильны обратные связи.

Очевидно, что удаленность влияния (т.е. выбор границы, с которой могут быть заданы входные воздействия) проектируемого МСХО будет различной для различных процессов (их фазовых переменных) в зависимости от среды, в которой они протекают. Влияние зависит от сопротивления рассматриваемой среды движущейся субстанции. В связи с этим различна зона влияния мелиоративной системы на водный и тепловой режимы окружающей территории, а в открытых потоках возмущение распространяется на большее удаление, чем в грунтовых.

Поэтому граница моделируемой системы, т.е. ширина подсистемы «изменяемая окружающая среда», для различных процессов может быть выбрана различно удаленной (но, по крайней мере, не меньше, чем по границе возмущения).

Таким образом, с формальной точки зрения отграничение МСХО от внешней среды заключается в эвристическом нахождении границы (линии) по грунту и водотокам, на которой обратная связь моделируемого объекта с выделяемой внешней средой (его влияние на внешнюю среду) пренебрежимо слабая. Т.е. влияние объекта мало, и вызываемыми им изменениями можно пренебречь, так как они не скажутся на результатах моделирования МСХО, причем не промежуточных переменных состояния, а выходных воздействий (урожайности). В результате этого на этой границе правомочно задавать входные воздействия на систему со стороны внешней среды на прогнозируемый период, используя ряды предыдущих наблюдений на ней, так как их однородность после реализации любого варианта МСХО практически не изменится.

Задание входных воздействий с внешних границ МСХО

Для всех определяющих мелиоративное состояние земель потоков: поверхностный сток, грунтовый сток, влагоперенос в зоне аэрации, открытые потоки в области моделирования (в пределах выделенной в соответствии с вышеизложенным границы МСХО) для замыкания системы описывающих их уравнений должны быть заданы необходимые внутренние граничные условия и внешние входные воздействия от окружающей среды.

С верхней и нижней границ входные воздействия учитываются составляющими в уравнении динамики пластов в уравнении Буссинеска.

Наиболее естественно проведение границы по линии раздела фаз, причем наиболее полярных, к примеру, твердое тело – воздух и т.д., и по поверхности разрыва сплошности моделируемой среды, т.е. в месте разрыва обратной связи. В связи с этим естественной верхней границей является поверхность почвы, контактирующая с воздухом атмосферы, в которой вода движется в виде отдельных капель дождя, а в почве – в виде грунтового потока, не влияющего на определяющие его входные воздействия – интенсивность осадков. С учетом наличия зоны аэрации для фильтрационного потока (1) верхней границей является поверхность УГВ, на которой задается инфильтрация $e(t,x,y)$. В общем случае

$$e = f(H_{гр}, W_{аэр}(t)) \quad (3)$$

где $W_{аэр}(t)$ – влажность в зоне аэрации, формирующаяся в зависимости от осадков, испарения и капиллярного подтока от УГВ. В строгой постановке влажность в зоне аэрации описывается одномерным уравнением влагопереноса со сшиванием в единую модель с уравнением Буссинеска на подвижной границе УГВ.

Для уравнения Сен-Венана верхней границей является поверхность воды, входное воздействие на которой может быть задано условием

$$q_{верх} = Oc(t) - Ис_e(t) \quad (4)$$

где $Oc(t)$ – осадки, $Ис_e(t)$ – испарение с водной поверхности.

Основные входные воздействия Oc , $Ис_e$ при этом практически не зависят от проектируемой системы, и поэтому могут задаваться, используя ряды предшествующих наблюдений, однородность которых не нарушится после создания системы.

Нижней границей для уравнения Буссинеска является водоупор, на котором имеет место условие непротекания. Однако часто под слабоводопроницаемой прослойкой залегает следующий водоносный горизонт (рис.2). При такой схеме более строгим является использование уравнения Буссинеска отдельно для каждого из двух потоков (с учетом того, что нижний – напорный), сшиваемых зависимостью вертикальных перетоков через слабоводопроницаемую прослойку, включаемую слагаемым в уравнения для каждого из водоносных пластов (последний член в уравнении (1)).

Такая схема точнее расчета по Буссинеску единого потока с осредненной поверхностью УГВ-УНВ в трехслойном грунте с использованием взвешенной проводимости пластов

$$T = \sum_{i=1}^n Km .$$

Очевидно, что относительно неглубокая врезка мелиоративной сети оказывает возмущающее действие на подземные воды до небольшой глубины. Поэтому при практическом отсутствии её влияния на изменение динамики УНВ приточность из нижележащего пласта может быть задана в качестве входного воздействия, используя в (3) H_n не

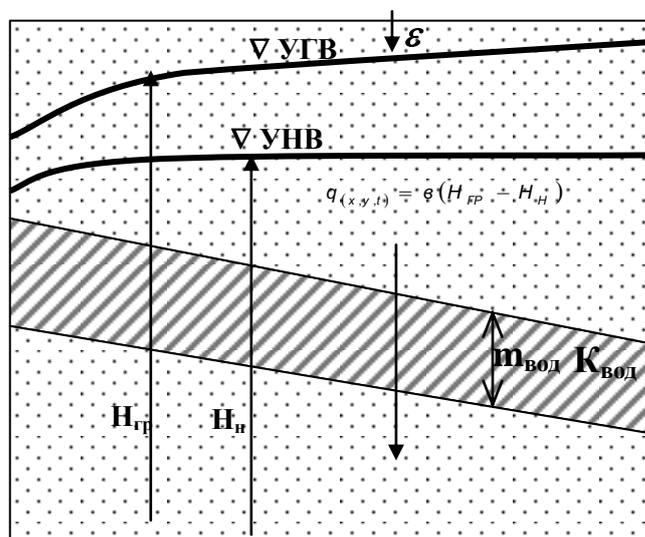


Рис. 2. Схема фильтрации воды в двух пластах с перетоком

расчетно, а непосредственно по результатам предшествующего мониторинга скважин в этом горизонте.

Боковые входные воздействия (граничные условия) моделируемого МСХО от внешней среды должны быть заданы для грунтовых и свободных потоков.

Описывающие движения воды в МСХО дифференциальное уравнение параболического типа Буссинеска (1) и гиперболического типа Сен-Венана (2) требуют задания по одному граничному условию в истоке и в устье (за исключением течения воды в водотоках со сверхкритической скоростью, когда требуется два граничных условия в истоке потока, что не характерно для мелиорации).

В классических уравнениях математической физики (к примеру, в теплопроводности [4]) обычно используются граничные условия трех видов: первого рода – на границе задано изменение функции; второго рода – на границе задано изменение производной функции; третьего рода – линейная зависимость между функцией и её производной.

На внешних границах МСХО граничные условия трех этих типов представляют входные воздействия со стороны внешней среды.

При моделировании динамики воды в русловых и грунтовых потоках МСХО граничное условие первого рода представляется уровнем (напором) на границе

$$H|_s = H(t). \quad (5)$$

Этот тип ГУ задается абсолютно строго для сухопутной границы фильтрационных потоков, когда за линией границы продолжается тот же тип грунта, что и в пределах

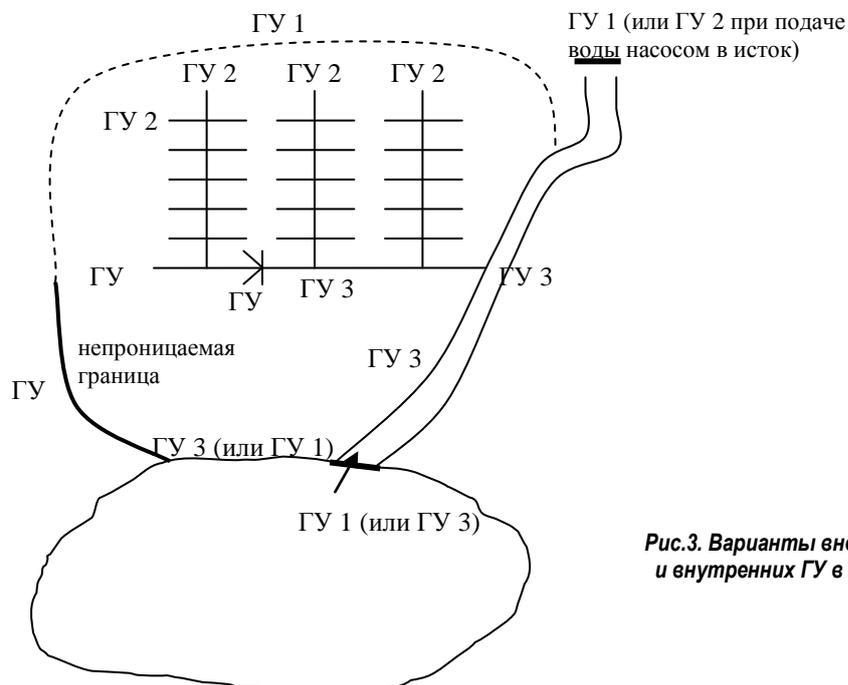


Рис.3. Варианты внешних и внутренних ГУ в МСХО

МСХО (рис. 3). Пренебрегая контактными потерями напора, ГУ первого рода может быть также задано на границе с открытыми каналами и водотоками.

Для русловых потоков ГУ первого рода может быть задано в замыкающих створах достаточно крупных водотоков, на уровнях которых создание проектируемого МСХО практически не скажется (рис. 3).

Граничное условие второго рода представляется расходом на границе

$$Q(t)|_z = -K \left(\frac{\partial H}{\partial x} \right)^n \Big|_r \quad (6)$$

Для фильтрационных потоков оно может быть задано абсолютно строго в редком случае водонепроницаемой боковой границы (типа непроницаемая стена в грунте), не протекание через которую отражается зависимостью $Q|_z = 0$ (т.е. $\frac{\partial H}{\partial x}|_z = 0$) (рис. 3), или, в частном случае, симметрии потока, когда на перегибе кривой депрессии аналогично $\frac{\partial H}{\partial x}|_z = 0$.

Для русловых потоков ГУ 2-го рода имеет место в истоках открытых водотоков и дренажа, где $Q(t)|_r = 0$, т.е. $\frac{\partial H}{\partial x}|_r = 0$, а также в створах водотоков, в которых

осуществляется откачка насосом с заданной интенсивностью $Q|_z = Q_{\text{насоса}}(t)$ (рис. 3).

Данное входное воздействие может быть реализовано только при активном управлении, используя откачку (подачу) воды насосом. При этом очевидно, что откачиваемый расход имеет ограниченный диапазон (к примеру, при заборе из устья большого расхода, превышающего возможное поступление воды с верховья, за короткий период произойдет опорожнение канала, и далее осуществлять забор воды с желаемым расходом невозможно).

Следует отметить, что мониторинг и задание переменных типа потока (Q для динамики воды) всегда сложнее задания переменной типа уровня (H) и при непосредственных замерах и при расчете, так как поток зависит и от уровня, и от его уклона вдоль потока, для определения которого необходимы значения уровня уже в двух точках.

Граничное условие третьего рода, представляющее баланс потоков, притекающего к границе и вытекающего из неё в общем случае наличия контактных потерь напора на границе (рис.4) может быть представлено зависимостью:

$$\delta(H|_z - h_{\text{внеш}})^m = -K \left(\frac{\partial H}{\partial x} \Big|_z \right)^n \quad (7)$$

Граничные условия 2 и 3-го рода представлены нами в обобщенном виде с различными показателями степени m и n , которые могут изменяться от 0,5 до 1,0 в соответствии с тем, что на границе для фильтрационных и русловых потоков могут иметь место различные режимы притекающего к границе и вытекающего из неё потоков (ламинарный и турбулентный, в переходной или в квадратичной зоне). Возможны различные их соотношения в зависимости от характеристик среды, в которой происходит движение. В соответствии с полученной нами зависимостью

$$j = \frac{\delta \cdot K}{\delta + K} \quad (8)$$

общая проводимость и, соответственно, формирующаяся приточность (скорость потока, а значит режим течения) лимитируется участком с наименьшей проводимостью (обычно фильтрация).

Для фильтрационных потоков на контакте с осушительной сетью в обычных для мелиорации грунтах, имеющих ламинарный режим, $n = 1$. С учетом того, что при поступлении приточности из пор грунта в открытый поток площадь живого сечения возрастает, то есть скорость уменьшается, $m = 1$. В редких случаях ($K_{\phi} > 10$ м/сут) возможна турбулизация грунтового потока, в результате чего $n < 1$, а m уменьшается в меньшей степени.

В открытых потоках: присоединение поверхностного потока к русловому, подпиранию поверхностный, слияние русловых потоков с различными характеристиками

поперечного сечения, пропуск руслового потока через гидротехнические сооружения (подпорные сооружения, трубы-переезды и т.п.) в общем случае $m = 0,5$ и $n = 0,5$. Однако, учитывая движение воды в мелиоративной сети с переменной массой, возрастающей от истока к устью, строго говоря, тип течения может изменяться по длине водотока, т.е. m и n могут меняться в диапазоне $0,5 \div 1$.

ГУ 3-го рода (8) отражает общий случай «несовершенства» контакта – наличие скачка уровней Δh_r на границе (рис.4).

В отличие от классического уравнения теплопроводности, в котором рассчитываемая функция – температура влияет на поток только через формируемый градиент температур, в уравнениях безнапорного течения воды уровень влияет одновременно и как градиент, и как глубина потока, определяющая площадь живого сечения (живое сечение не зависит от искомых напоров только в напорных потоках). Поэтому при движении воды тем более неизбежен скачок уровней на контакте потоков, причем тем больший, чем большее различие между ними, и большие граничные сопротивления.

Задание внутренних граничных условий для сшивания моделей различных подсистем МСХО

Внутренние граничные условия для модели МСХО требуется записывать на линиях, где имеет место любое изменение однородности моделируемой среды: вида потока, а значит, описывающего его уравнения (на контакте грунтовый – свободный поток, т.е.

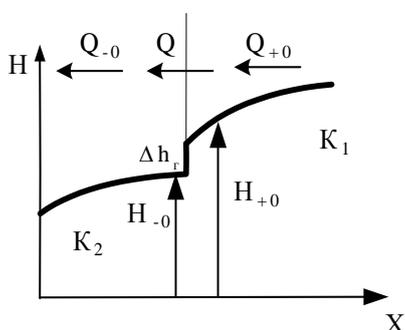


Рис.4. Внутреннее граничное условие на контакте потоков

грунт-канал, грунт-дрена); характеристик потока одного вида (для фильтрационных потоков на контакте грунтов с различной проводимостью, для открытых потоков в узлах слияния водотоков, в сечениях с изменением морфометрических характеристик – формы и площади поперечного сечения, коэффициентов шероховатости, частным случаем чего фактически можно считать гидротехнические сооружения на сети, рассматривая их как короткий водоток со своеобразным поперечным сечением), а также в местах разрыва сплошности потоков.

Если же в этих местах осуществляется управление (манипулирование затворами, откачка насосами), то они являются входными воздействиями из внешней среды, т.е. граница становится внешней.

В соответствии с вышеизложенным для всех этих контактов необходимо записать граничные условия.

В этих контактных сечениях слева (-0) и справа (+0) от них имеет место изменение описывающих динамику воды уравнений или их параметров. Поэтому требуется задавать «сшивающие» их условия непосредственно на самой границе (рис.4).

В сравнении с внешней границей, на которой ГУ задавались как входные воздействия со стороны внешней среды в явном виде для расчета моделируемой системы, внутренние ГУ отличаются тем, что являются одновременно условиями для расчета обоих контактирующих потоков любого типа слева и справа от границы (грунт-русло, грунт 1-грунт 2, русло 1-русло 2, русло-гидротехническое сооружение-русло и т. п.). В результате этого в явном виде внутреннее ГУ неизвестно, а выступает в виде «сшивающих» контактирующие потоки зависимостей, отражающих баланс Q и сопряжение уровней воды и справа, и слева от границы. При этом уравнения динамики обоих контактирующих потоков слева и справа от границы необходимо решать совместно с этим внутренним граничным условием в единой системе, в результате чего находятся вектор-функции Q и H обоих рассчитываемых потоков одновременно, а также и их значения в контактном сечении.

Таким образом, в общем случае вдоль оси X моделируются потоки - и справа (+0), и слева (-0) от границы (рис.4). Для этого случая на границе имеют место следующие соотношения, отражающие баланс расходов в неразрывном потоке воды на границе и сопряжение уровней (напоров):

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_{+0} = K_{+0} \cdot \left(\frac{\partial H}{\partial x} \right)_{+0}^{n_{+0}} \quad (9) \\ Q_{-0} = K_{-0} \cdot \left(\frac{\partial H}{\partial x} \right)_{-0}^{n_{-0}} \quad (10) \\ Q_0 = b(H_{+0} - H_{-0})^{m_0} \quad (11) \\ Q_{+0} = Q_0 \quad (12) \\ Q_0 = Q_{-0} \quad (13) \end{array} \right.$$

Зависимость (9) - граничное условие для уравнения потока справа от границы.

Зависимость (10) - граничное условие для уравнения потока слева от границ.;

Зависимость (11) - расход на контактной границе.

Уравнения (12), (13) отражают сохранение расхода на границе потоков (отсутствие внутренних источников – стоков на ней).

В уравнениях (9)-(13) имеется 5 неизвестных. Подставив Q_0 по (11) в (12) и (13) и приравняв соответственно с (9) и (10), получим

$$\left\{ \begin{array}{l} K_{+0} \left(\frac{\partial H}{\partial x} \right)_{+0}^{n_{+0}} = b(H_{+0} - H_{-0})^{m_0} \quad (14) \\ K_{-0} \left(\frac{\partial H}{\partial x} \right)_{-0}^{n_{-0}} = b(H_{+0} - H_{-0})^{m_0} \quad (15) \end{array} \right.$$

Или, подставив (14) в (15), получим

$$K_{+0} \left(\frac{\partial H}{\partial x} \right)_{+0}^{n+0} = K_{-0} \left(\frac{\partial H}{\partial x} \right)_{-0}^{n-0} \quad (16)$$

Постоянная зависимость (16) является внутренним граничным условием (граничное условие 4-го рода) для общего случая контакта любых потоков (например, уравнения Буссинеска с различной проводимостью пласта слева и справа от границы), в неявном виде задающим условие на границе и для левого, и для правого потоков, сшивающим решение описывающих эти потоки уравнений в единую рассчитываемую совместно систему. Этот случай относится исключительно к внутренней границе и не требует задания входных воздействий.

В более частном случае, вдоль оси X может моделироваться поток только с одной стороны границы (для примера возьмем с правой стороны, так как если рассматривать с левой, то будет абсолютная аналогия). Это имеет место в случае бесконечно большой проводимости $K_{-0} \rightarrow \infty$ вдоль оси X слева от потока (к примеру, для случая поступления приточности из грунтового потока в русловой), тогда из (10) имеем, $\left(\frac{\partial H}{\partial x} \right)_{-0}^{n-0} = \frac{Q_{-0}}{K_{-0}} = \frac{Q_{-0}}{\infty} \rightarrow 0$ т.е. слева от границы уровни H_{-0} горизонтальны и нет необходимости их моделировать.

Исходя из равенства расходов по (12), имеем равенство правых частей (9) и (11):

$$\delta (H_{+0} - H_{-0})^{m_0} = K_{+0} \left(\frac{\partial H}{\partial x} \right)_{+0}^{n+0}, \quad (17)$$

откуда

$$H_{+0} = H_{-0} + m_0 \sqrt[n+0]{\frac{K_{+0}}{\delta} \left(\frac{\partial H}{\partial x} \right)_{+0}^{n+0}}. \quad (17')$$

Уравнение (17') является граничным условием 3-го рода для уравнения динамики воды справа от границы и в общем случае должно решаться совместно с ним.

При большом коэффициенте водообмена $\alpha \rightarrow \infty$, т.е пренебрежимо малом сопротивлении перетоку на границе потока (для случая вытекания фильтрационного потока в русловой поток сопротивления обозначаются $L_{нк}$) (17') вырождается в зависимость

$$H_{+0} = H_{-0}, \quad (17'')$$

представляющую собой ГУ 1-го рода.

Таким образом, ГУ 1-го рода – это частный случай ГУ 3-го рода при предположении «абсолютного контакта» – бесконечно большой проницаемости границы, приводящий к отсутствию потерь напора на ней (на рис.4).

Для расчета потока справа от границы с ГУ 3-го рода (17') или с ГУ 1-го рода (17'') $H_0(t)$ в них должно быть задано.

На внешней границе $H^0(t)$ является задаваемым в явном виде входным воздействием, используя, в соответствии с ранее изложенным, ряды их предыдущих наблюдений. В отличие от этого на внутренних границах контактов (к примеру, грунт-руслевой поток) в общем случае априори в явном виде H_0 неизвестно. Например, при втекании фильтрационного потока в русло, даже при допущении горизонтальности уровня в нем по оси x (в поперечном русловом потоку сечении русла), его величина является неизвестной, так как имеет место продольный уклон потока, который формируется в зависимости от боковой фильтрационной приточности. Поэтому необходимый для расчета уравнения Буссинеска уровень воды в осушающем канале может быть найден только расчетом уравнения Сен-Венана, в связи с чем эти уравнения должны решаться совместно со сшиванием на границе ГУ 3-го рода (17').

Аналогичными примерами является впадение грунтового и руслового потоков в водоем (или в канал с закрытым подпорным сооружением), изменение уровня в котором при этом определяется приточностью от этих потоков и морфометрией водоприемника, соответствующее чему балансовое уравнение должно решаться совместно с уравнением моделируемого потока.

При непроницаемой границе, т.е. $\alpha = 0$ при ГУ 3-го рода вырождается в частный случай граничного условия второго рода соответствующего $Q=0$:

$$\left(\frac{\partial H}{\partial x} \right)_0^{n+0} = 0.$$

Это условие соответствует истокам каналов. ГУ 2-го рода может также иметь место при откачке воды из подпертого водотока насосом с заданным расходом Q .

При использовании ГУ 2-го рода нет необходимости делать предположение о том, абсолютный или не абсолютный контакт имеет место, так как расход задается в явном виде.

Заключение

В связи с неразрывностью водной среды моделирование водного режима для сравнения осушительного действия различных вариантов мелиоративной сети и выбора из них оптимального по экономическим показателям необходимо осуществлять посредством совместного решения уравнений Буссинеска и Сен-Венана для ряда полей и сложной топологии мелиоративной сети. В общем случае на внешней границе входные воздействия должны задаваться в виде граничного условия 3-го рода или частных случаев ГУ 1 и ГУ 2, а на внутренних границах условием 4-го рода, которые отражают баланс расходов и сопряжение уровней в контактирующих потоках с перепадом напоров, вызываемым несовершенством контакта.

«Совершенный контакт» $H_0=H_{+0}$, представляющий граничное условие 1-го рода, являющееся частным случаем ГУ 3-го рода при бесконечно большой проницаемости границы, строго соответствует только случаю движения в однородной среде, т.е. может соответствовать внешней сухопутной границе МСХО при одинаковой проводимости грунтов по обе ее стороны.

На контакте любых (фильтрационных, русловых) потоков с различающимися характеристиками всегда имеет место несовершенный контакт, т.е. ГУ 3 или 4-го рода, так как при этом неизбежно имеют место потери напора. Однако при небольшой величине перепада напоров на границе потоков ими можно пренебрегать и практически считать $H_0=H_{+0}$, т.е. задавать ГУ 1-го рода

Такое допущение возможно только при «нерезком» изменении свойств контактирующих сред (их вида, характеризующих их констант, площади поперечного сечения потока), например, на контакте фильтрационных потоков грунтов с незначительно различающимися проницаемостями. В этом случае на контакте потоков практически имеет место только перегиб уклонов слева и справа от границы, обратно пропорциональных коэффициентам проводимости.

При значительном различии параметров контактирующих потоков несовершенство контакта значительно и пренебрегать перепадом напора на границе нельзя. Это имеет место при втекании фильтрационного потока в канал или дренаж, сужении руслового потока гидротехническими сооружениями и т.п. В результате этого в этих сечениях должно задаваться ГУ 3-го рода.

Литература

1. Вахонин, Н.К. Особенности проектирования и согласования расчетов проводящей и регулирующей сети при реконструкции и модернизации мелиоративных систем/Н.К.Вахонин // Эколого-экономические принципы эффективного использования мелиорированных земель. – Минск, 2000. – С. 113-118.
2. Технические условия и нормы проектирования осушительных систем в Белорусской ССР. – Минск, Белгипроводхоз, 1970. – 330 с.

3. Вахонин, Н.К. Совершенствование проектирования мелиоративных систем на основе системного анализа /Н.К.Вахонин // Достижения НТП – в мелиорацию и водное хозяйство УССР: Тез.докл. Часть 1. Республ. науч.-техн. конференции. Ровно, 1987 г. – С.6-7.
4. Араманович, И.Г. Уравнения математической физики /И.Г.Араманович, В.И. Левин // М.: Наука, 1969. – 287 с.

Summary

Vakhonin N. Problems of Boundary Conditions Closing at Reclamative System Modeling

Questions of the task of the border conditions are considered in detail in article at modeling reclamative agricultural objects by differential equations in quotient derived. There are considered particularities each of subsystems and corresponding to them types of the border conditions on internal border of different types water flow contact, as well as input influences on external border from the external ambience.

Поступила 26 июня 2009 г.