ЗЕМЛЕДЕЛИЕ И РАСТЕНИЕВОДСТВО

УДК 633.5:633

ОПТИМИЗАЦИЯ РАЗМЕЩЕНИЯ СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННЫХ КУЛЬТУР ПО ПОЛЯМ И ИНТЕНСИВНОСТИ ИХ ВЫРАЩИВАНИЯ

Н.К. Вахонин, *кандидат технических наук*
А.П.Мотульская, *младший научный сотрудник*
РУП «Институт мелиорации»

Ключевые слова: *оптимизация, прибыль, адаптивное размещение культур, модель урожая, урожаеобразующие факторы, линейное программирование, симплекс-метод, нелинейное программирование*

Введение

Существует два способа принятия решения по сельскохозяйственному использованию земель: эвристический, основанный на субъективных оценках эксперта, и строго математический – посредством решения задачи оптимизации. Недостатком первого способа является то, что невозможно оценить действительную приближенность выбранного решения к оптимальному. При этом очевидно, что вероятность найти действительно оптимальное решение исчезающе мала. Это связано с тем, что рассматриваемая система относится к большим системам и выбор оптимального варианта размещения культур по полям и интенсивности их выращивания в действительности осуществляется из бесконечно большого их множества. При этом можно предположить, что выбрать более подходящие участки для культур и рассчитать дозы внесения удобрений для получения заданного урожая (к примеру по балансу выноса питательных элементов [1]) опытный агроном, используя многолетний практический опыт, с каким-то приближением еще сможет, но выбрать варианты оптимальные по экономическим показателям без расчетов абсолютно нереально. В действительности же, учитывая частую сменяемость агрономов, т. е. минимальное число лет эмпирических наблюдений за урожайностью, используемых ими при осуществлении эвристического выбора, обоснованность экспертного выбора проблемна и по критерию урожая.

В связи с этим важнейшей задачей для растениеводства хозяйств является формализация задачи оптимизации сельхозиспользования и строгое ее решение, т. е. нахождение действительно экономически наилучшего варианта. В особенности актуально правильное решение задачи эффективного сельхозиспользования для обеспечения окупаемости дорогостоящей реконструкции мелиоративных систем.

Формализация задачи оптимизации сельхозиспользования по критерию прибыли

С биологической точки зрения, при размещении сельскохозяйственных культур по полям можно исходить из различных вариантов адаптации: к свойствам полей, к предшественникам и соседям, к стохастическим погодно-климатическим условиям, но, в конечном итоге, во всех случаях эффективность должна рассматриваться в экономических показателях максимума доходов, минимума затрат [2,3].

В данной работе рассматривается задача предельной адаптации культур только к свойствам полей: выбор размещения n культур на m полях, обеспечивающего максимальную экономическую эффективность. Следует отметить, что вообще говоря, получаемые оптимальные варианты распределения одних и тех же культур по одному и тому же набору полей могут различаться для случаев применения различных уровней урожаеобразующих факторов (доз удобрений, водного режима и т.п.) в силу нелинейности многофакторной зависимости урожайности от свойств полей и доз удобрений и взаимосвязанности их воздействий (пересечение факторов) на урожай. В связи с этим рассматривается задача глобальной оптимизации: одновременно и размещения культур, и интенсивности использования факторов, необходимых для получения урожаев.

Важнейшей особенностью задачи является то, что часть оптимизируемых переменных имеет дискретный вид, в результате чего соответствующее им число вариантов велико, но конечно. Так, число вариантов размещения культур по полям $R = n^m$ (в n в качестве одного из видов культуры входит и пар, то есть отсутствие посева).

Интенсивность сельхозпроизводства (дозы удобрений) является непрерывной величиной, в связи с чем вариантов доз удобрений (а значит, их сочетаний) бесконечное множество. В рассматриваемой задаче одновременно осуществляется нахождение оптимальных вариантов размещения культур и интенсивности их выращивания с принятием в качестве функции цели прибыли: линейной свертки доходов и затрат (разности между доходами от реализации выращиваемых культур и затратами на их производство).

Формализация, с учетом дополнительных ограничений на различные показатели [3]: валовые сборы, посевные площади, используемые факторы, имеющиеся ресурсы, имеет вид:

$$\max_{X_{ij\kappa}} \Pi(X_{ij\kappa}) = \max_{X_{ij\kappa}} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} F_{ij}(Д_{ij} + З_{ij}) = \max_{X_{ij\kappa}} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} F_{ij}\, y_{ij} c_i \quad (\xi_{ij} + \xi_{Up\,ij} + y_{ij}\eta_{ij} + \mu_{ij}) \tag{1}$$

$$\sum_{j=1}^{m} F_{ij} y_{ij} \ge Y_{H\,i}, \forall\ i \in \{1,\dots,\ n\}, \tag{2}$$

$$F\min_i \le \sum_{j=1}^{m} F_{ij} \le F\max_i, \forall\ i \in \{1,\dots,\ n\} \tag{3}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \mathrm{F}_{ij}(\xi_{ij} + \xi_{Up\,ij} + y_{ij}\eta_{ij} + \mu_{ij}) \le \mathrm{P} \tag{4}$$

$$0 \le X_{ijk} \le X_{H\,kj}, \forall\ j \in 1\dots m \tag{5}$$

$$y_{ij} = f(X_{ijk}) \qquad k \in 1\dots kfacts \tag{6}$$

$$\xi_{ij} = \sum_{k=1}^{kfacts} X_{ijk} b_{\kappa} + \sum_{k=1}^{kfacts} X_{ijk} a_{kj} = \sum_{k=1}^{kfacts} X_{ijk}\, b_k^{'} + a_{kj} \tag{7}$$

$$\xi_{Up\,ij} = (Z_{1_{ij}} + \dots + Z_{l_{ij}})^2 \tag{8}$$

Например, для четырех факторов (для примера взяты $DN_{ij}, DP_{ij}, DK_{ij}, DUGV_{ij}$ – дозы удобрений азота, калия, фосфора и уровень грунтовых вод) уравнения (5)-(8) имеют вид

$$0 \le DN_{ij} \le DN_{H\,ij},\ 0 \le DP_{ij} \le DP_{H\,ij},\ 0 \le DK_{ij} \le DK_{H\,ij},\ 0 \le DUGV_{ij} \le DUGV_{H\,ij} \tag{5'}$$

$$y_{ij} = f(DN, DP, DK, DUGV) \tag{6'}$$

$$\xi_{ij} = DN_{ij} * b_N + DP_{ij} * b_P + DK_{ij} * b_K + DUGV_{ij} * b_{UGV} + a_{N_j} DN_{ij} + a_{P_j} DP_{ij} + a_{K_j} DK_{ij}, \tag{7'}$$

$$\begin{aligned}\xi_{Up\,ij} = {} & \beta_1 + \beta_2 z1_{ij} + \beta_3 z2_{ij} + \beta_4 z3_{ij} + \beta_5 z4_{ij} + \beta_6 z1_{ij} z2_{ij} + \beta_7 z1_{ij} z3_{ij} + \beta_8 z1_{ij} z4_{ij} + \\ & + \beta_9 z2_{ij} z3_{ij} + \beta_{10} z2_{ij} z4_{ij} + \beta_{11} z3_{ij} z4_{ij} + \beta_{12} z1^2_{ij} + \beta_{13} z2^2_{ij} + \beta_{14} z3^2_{ij} + \beta_{15} z4^2_{ij},\end{aligned} \tag{8'}$$

В уравнениях (1)-(8):

j – номер поля, $j = 1 \div m$;

i – номер культуры, $i = 1 \div n$; в число культур n входит и использование поля под пар, то есть отсутствие культуры;

k – номер фактора, определяющего величину урожая $k = 1 \div kfacts$;

$kfacts$ – число оптимизируемых, определяющих величину урожая, факторов;

$П(X_{ijk})$ – прибыль от растениеводства;

$Д_{ij}$ – доход от урожая i-й культуры на j-м поле;

$З_{ij}$ – затраты на i культуру на j-м поле, складывающиеся из затрат на выращивание, зависящих от площади, и на уборку, зависящую от величины урожая;

X_{ijk} – величины оптимизируемых урожаеобразующих факторов типа доз, числом $kfacts$, применяемых под культуру i на поле j.

ξ_{ij} **–** затраты ресурсов (денег) на 1 га на $kfacts$ факторов X_{ijk} для получения y_{ij} урожайности на F_{ij} поле.

ξ_{Upij} – дополнительные затраты на управляющие нелинейные факторы Z_{ijk}, представляемые эмпирическим полиномом (8) второй степени с пересечениями с любым числом аргументов $l = zfacts\ (zfacts \in \{0 \dots kfacts\})$.

В отличие от ξ_{ij} по (7), принятой априори в программе линейного вида, вид функции $\xi_{Up\,ij}$ по (8) однозначно в программе не задан и вводится в файле *ksi_up.txt*.

Очевидно, что при задании соответствующих коэффициентов регрессии β в (8) равными нулю, некоторые из факторов могут быть исключены из рассмотрения, что, в частности, сводит (8) к линейному (7).

Таким образом затраты на оптимизируемые факторы подразделяются на три типа: закупка фактора (дозы); внесение дозы, задаваемые первым и вторым слагаемым в (7), и затраты на управление (типа глубина УГВ, $Н_{предпосевной}$, $Н_{сред.вегетационный}$, число дней затоплений, число дней засухи и т. п.), задаваемые эмпирическим полиномом вида (8). Следствием осуществления этих затрат является получаемая величина выращенного урожая и соответствующая величина затрат на его уборку, отражаемая третьим слагаемым в скобках в уравнении (1). Все остальные базовые затраты по всем неоптимизируемым составляющим технологии получения урожая учитываются четвертым членом в скобках в уравнении (1).

F_{ij} – площадь j-го поля, занятого под i-ю культуру;

Принимаем, что поле используется полностью под одну культуру, в соответствии с чем $F_{ij} = F_j, \ \forall i$ (в тексте используется именно обозначение F_{ij}, чтобы формально сохранить физический смысл этой величины, а в программе F_j для прозрачности кода).

$Fmin_i, \ \ Fmax_i, \ \forall i \in \{1,..., \ n\}$ – нормативно задаваемые ограничения на минимальную и максимальную площади, занимаемые суммарно под каждую культуру в отдельности;

X_{Hkj}– нормативно заданные ограничения сверху на факторы k на поле j.

Например, это могут быть экологические ограничения на дозы каждого удобрения (в рассматриваемом примере это величины $DN_{Hij}, DP_{H\,ij}, DK_{H\,ij}, DUGV_{H\,ij}$).

y_{ij} – урожайность i-й культуры на j-м поле;

Y_{Hi} – нормативно заданный минимум валового сбора i-й культуры;

c_i – цена реализации 1 тонны i-й культуры;

b_k – цена закупки одной тонны k-го фактора (в рассматриваемом примере b_N, b_P, b_K, b_{UGV} : удобрений азота, фосфора, калия и работ по достижению заданного уровня грунтовых вод);

a_{kj} – удельные затраты по внесению единицы массы k-го фактора на j-е поле;

$з_{ij}$ – цена уборки, транспортировки i-й культуры, посаженной на j-м поле;

$y_{ij}з_{ij}$ **–** затраты на уборку, транспортировку урожая (стоимость работ, зависящих от величины полученного урожая);

μ_{ij} – базовые затраты на все остальные, не рассматриваемые в качестве альтернатив элементы технологий получения урожая i-й культуры, посаженой *на* j-м поле;

P – имеющиеся денежные ресурсы для распределения между всеми факторами.

Для наглядного отображения множества локальных задач можно построить матрицы всех возможных вариантов размещения *n* культур по *m* полям, где единица в ячейке A_{ij} на пересечении строк и столбцов означает наличие культуры i на поле j, определяемом номером столбца.

Так как принято, что поле занимается одной культурой, то очевидно, что на одном поле (то есть в одном столбце) может быть только одна культура (одна единичка в столбце). Например, матрица расположения культур на полях при варианте *n*=*2, m*=*2,*

$$A = \begin{array}{cc} & \\ y_1 & \\ y_2 & \\ & \end{array}\begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cc} F_1 & F_2 \end{array} \end{array}$$

показывает, что на первом поле посажена первая культура, а на втором – вторая.

Однако в вычислениях более удобно использовать не матричное, а векторное представление размещения культур по полям. Размерность вектора полей равна количеству полей (j-я позиция вектора представляет собой j-е поле), где в каждой позиции стоит номер i растущей на данном поле культуры. Например, вектор *{2, 1}* означает, что на первом поле растёт вторая культура, на втором поле растёт первая культура.

Тогда вместо F_{ij} во всех формулах будет $Ind[i, j]F_{ij}$,

где $Ind[i, j] = \begin{cases} 1, y_i \in F_j \\ 0, y_i \notin F_j \end{cases}$

Таким образом (1) – (8) представляет задачу для общего случая оптимизации размещения n культур между m полями и выбора при этом оптимального распределения средств между *kfacts*,определяющими урожайность факторами и управлениями.

Алгоритм решения задачи глобальной оптимизации сводится к решению $R=n^{m}$' однотипных локальных задач – нахождению оптимальной интенсивности сельхозиспользования (доз удобрений) для каждого из вариантов размещения культур по полям, из которых находится затем супероптимум.

Локальные задачи сводятся к различным типам задач оптимизации в зависимости от вида используемой зависимости урожайности от урожаеобразующих факторов. При линейном виде зависимости оптимизация сводится к задаче линейного программирования, решение которой реализовано симплекс-методом Данцига, с использованием методов внутренней точки Кармакара. Для полиномиальной зависимости урожайности задача сводится к нелинейной оптимизации, решение которой реализовано методом Нелдера-Мида с использованием метода внутренней точки Форсгрена.

Программная реализация задачи осуществлена посредством написания скриптов в приложении «Mathematica». Для линейного случая разработана программа *MoneyMax-Linear.nb*, для нелинейного *MoneyMaxPolynomial.nb*.

Для решения задачи необходимо иметь конкретный вид зависимостей (6) урожая от любого заданного числа *kfacts*, для нахождения которых (формулы (6) и конкретно (6'') и (6''')) необходимы результаты многофакторных полевых экспериментов по урожайности. Расчеты реализованы для двух вариантов вида зависимости - урожая линейной и полиноминальной с полным пересечением факторов:

- линейная многомерная регрессия урожая от факторов (которые для удобства обозначены как $x1_{ij}$, $x2_{ij}$, $x3_{ij}$, $x4_{ij}$, (например, это факторы - $DN_{ij}, DP_{ij}, DK_{ij}, DUGV_{ij}$) вида

$$y_{ij} = \alpha_1 + \alpha_2 x1_{ij} + \alpha_3 x2_{ij} + \alpha_4 x3_{ij} + \alpha_5 x4_{ij} \qquad (6'')$$

- нелинейная многомерная регрессия урожая от факторов вида

$$\begin{aligned} y_{ij} &= \alpha_1 + \alpha_2 x1_{ij} + \alpha_3 x2_{ij} + \alpha_4 x3_{ij} + \alpha_5 x4_{ij} + \\ &\alpha_6 x1_{ij} x2_{ij} + \alpha_7 x1_{ij} x3_{ij} + \alpha_8 x1_{ij} x4_{ij} + \alpha_9 x2_{ij} x3_{ij} + \alpha_{10} x2_{ij} x4_{ij} + \alpha_{11} x3_{ij} x4_{ij} + \\ &+ \alpha_{12} x1^2_{ij} + \alpha_{13} x2^2_{ij} + \alpha_{14} x3^2_{ij} + \alpha_{15} x4^2_{ij} \end{aligned} \qquad (6''')$$

Другие типы полинома (экспоненциальный, тригонометрический и т. п.) могут быть представлены алгебраическими полиномами, путем предварительного разложения в ряд Тейлора.

Коэффициенты α рассчитываются в специально написанной программе, реализующей МНК. Определение коэффициентов α, используя данные многофакторных полевых экспериментов по урожайности, осуществляется одновременно для линейной и полиномиальной регрессионных моделей с помощью скрипта *RegrKoeff.nb*, реализующего метод наименьших квадратов. Входными данными для него являются данные многофакторных экспериментов по урожайности, которые должны быть представлены в виде двухмерной таблицы текстового формата, в столбцах которой через табуляцию представлены значения аргументов *X* и соответствующие величины урожая *Y*. Каждому эксперименту соответствует одна строка таблицы.

Для каждой культуры на каждом поле необходима своя отдельная регрессионная таблица экспериментов (отдельный файл). Общее количество файлов для решения задачи равно $n*m$, файлы имеют имена *Fi.j.txt.* Например, для решения задачи размерности $n=2$, $m=2$ файлов должно быть четыре: *F1.1.txt*, *F1.2.txt*, *F2.1.txt*, *F2.2.txt*. Нахождение регрессионных зависимостей в программе осуществляется сразу для всех культур на каждом из полей. Поэтому при запуске программы необходимо вводить значения *n, m.* Количество факторов *kfacts* определяется программой автоматически из первого входного файла *Fi.j.txt* эмпирических данных по первой культуре на первом поле: *kfacts* равно числу столбцов в таблице данных опытов по урожайности, за вычетом последнего (последний столбец – значения урожайности).

Рассчитанные коэффициенты α линейной и квадратичной зависимостей урожая для каждого поля – культуры выводятся в выходные файлы, соответственно, *LinearRegr.txt* и *PolinomialRege.txt*, используемые в качестве входных данных в программах оптимизации соответственно *MoneyMaxlinear.nb* и *MoneyMaxPolynomial.nb*. Результаты расчетов представляются в виде величин найденных оптимальных значений управляющих факторов по каждой локальной задаче (предусмотрена распечатка 10 лучших вариантов размещения культур) и окончательно выбранный лучший из них – глобальный оптимум.

Проведенные численные расчеты по решению задачи показывают, что в связи с достаточной сложностью алгоритма время счета достаточно заметно: для 10 культур, 20 полей и 4 факторов за час находится решение 5 тысяч локальных задач. В связи с этим для решения задачи при большом числе культур и особенно полей необходимы компьютеры с максимально большим быстродействием.

Выводы

1. Выбор оптимального по экономическим критериям варианта размещения сельскохозяйственных культур по полям и интенсивности их выращивания на основе эвристических соображений нереален в силу бесконечно большого числа вариантов и ограниченности имеющейся у экспертов информации, необходимой для принятия решений.

2. Осуществленная формализация задачи оптимизации и ее программная реализация обеспечивают возможность математически строгого расчета оптимальных вариантов сельхозиспользования земель агропредприятий. Точность получаемых решений определяется надежностью используемых в модели многофакторных зависимостей урожая. Для обеспечения их достоверности необходимы ряды наблюдений за урожайностью достаточной длины. В связи с этим для принятия оптимальных решений по сельхозиспользованию земель, в том числе мелиорированных, особую актуальность имеет ведение книги истории полей в хозяйствах в автоматизированном виде, что необходимо для эффективного получения надежных зависимостей урожайности.

Литература

1. Методические указания по разработке программы расчетов по системам удобрения сельскохозяйственных культур на РС. НАН Беларуси, Белорусский НИИ почвоведения и агрохимии./ В.В.Лапа [и др.] – Минск:БелНИИПиА. – 47 с.
2. Вахонин, Н.К. Методологические принципы формирования задач оптимизации растениеводства./ Н.К. Вахонин //Мелиорация переувлажненных земель. – 2007. – № 2 (58). – С. 73-99.
3. Вахонин, Н.К. Вариации задач оптимизации сельскохозяйственного использования земель./ Н.К. Вахонин //Мелиорация переувлажненных земель. – 2008. – № 1(59). – С. 91-99.

Summary

Vakhonin N., Motulskaja A. Optimization of Arrangement of Agricultural Crops on Fields and Intensity of Their Growing

The problem of optimization of agricultural crops accommodation on fields of their cultivation is considered and formalized. Cultures are placed is extremely adapted for properties of fields, simultaneously there is an optimum distribution of means between factors which influence a crop. Program realization of algorithms is carried out and used as function of the purpose for profit. Program realization is executed for cases of a linear and nonlinear kind of dependence of a crop from factors.

Поступила 11 июля 2008 г.