

ТРЕБОВАНИЯ К МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ УРОЖАЙНОСТИ СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННЫХ КУЛЬТУР

А. П. Лихацевич¹, доктор технических наук

Г. В. Латушкина¹, кандидат технических наук

А. В. Малышко², заведующий отделом минерального питания

С. В. Набздоров³, кандидат сельскохозяйственных наук

¹РУП «Институт мелиорации», г. Минск, Беларусь

²РУП «Опытная научная станция по сахарной свекле», г. Несвиж, Беларусь

³УО «Белорусская государственная сельскохозяйственная академия», г. Горки, Беларусь

Аннотация

Сформулированы требования, которые необходимо выдерживать при моделировании урожайности сельскохозяйственных культур. Они определяют структуру математической модели, условия ее верификации и продолжительность рядов многолетних наблюдений. Установлено, что 3-летних данных недостаточно для построения достоверной математической модели урожайности.

Ключевые слова: урожайность, питание растений, атмосферные осадки, температуры воздуха, опорные показатели математической модели урожайности.

Abstract

A. P. Likhachevich, G. V. Latushkina, A. V. Malysko, S. V. Nabzdorov

LIMITATIONS IN MATHEMATICAL MODELING OF AGRICULTURAL CROPS YIELD

The requirements that must be observed when modeling crop yields are formulated. They determine the structure of the mathematical model, the conditions for its verification and the duration of a series of long-term observations. It has been established that 3-year data is not enough to build a reliable mathematical model of yield.

Keywords: productivity, plant nutrition, atmospheric precipitation, air temperature, reference indicators of the mathematical model of productivity.

Введение

Эффективность решения практических задач прогнозирования и оптимального управления в сельском хозяйстве может быть повышена с использованием математического моделирования технологических процессов. Вместе с тем практический опыт показывает, что математические модели как средство, облегчающее выработку лучших плановых технико-агрономических решений в растениеводстве, будут применяться на практике только в том случае, если их внедрение не связано с необходимостью введения трудоемких операций и не вызывает дополнительных трудностей в работе специалистов сельского хозяйства [1]. Вероятно, именно поэтому до настоящего времени не получили практического завершения предложения по созданию информационной системы поддержки принятия решений, предназначенные для планирования и оптимизации управления системами

земледелия на основе учета влияния факторов внешней среды на урожайность сельскохозяйственных культур.

Теоретической основой представления результатов исследований в сельскохозяйственной науке являются математическая статистика и теория вероятности с применением в основном эмпирических форм обобщения опытных данных. Весьма редко используется математический аппарат теории планирования эксперимента, и это вполне объяснимо, поскольку основные положения данной теории справедливы при проведении активного опыта, в котором могут присутствовать только управляемые переменные [2]. В аграрной науке, связанной с изучением воздействия на сельскохозяйственные культуры не только техногенных управляемых, но и природных неуправляемых факторов с непредсказуемой динамикой, использование математической

теории планирования эксперимента весьма ограничено, а в области численного описания взаимодействий в системе «факторы среды – урожайность» вообще неприменимо.

Методики, используемые при моделировании системы «факторы среды (аргументы) – урожайность (функция)»

Формулы, предлагаемые разными авторами и предназначенные для цифрового описания результатов воздействия условий окружающей среды на урожайность сельскохозяйственных культур, можно сгруппировать в отдельные не связанные между собой ниже следующие блоки, различающиеся методическим подходом к построению расчетных зависимостей.

1. *Эмпирические уравнения произвольной структуры, зависящей от субъективных предпочтений их авторов* [3, 4]. Например, в 2005–2008 гг. в Волгоградской обл. выполнены полевые исследования, целью которых заключалась в совершенствовании агротехники выращивания баклажан на среднесуглинистых светло-каштановых почвах при капельном орошении. Авторы установили, что изменение урожайности подчиняется нелинейному закону и наиболее достоверно описывается уравнением регрессии следующей формы [3]:

$$Y_{\text{баклаж.}} = -294,6 + 0,65N + \frac{48894,9}{W_{\text{пп}}} - 0,0007N^2 - \frac{1929690}{W_{\text{пп}}^2} - \frac{21,1N}{W_{\text{пп}}}, \quad (1)$$

где $Y_{\text{баклаж.}}$ – урожайность баклажан при возделывании в ранней культуре с использованием тоннельных укрытий, т/га; N – доза внесения азота, кг д. в./га; $W_{\text{пп}}$ – уровень предполивной влажности почвы, % от наименьшей влагоемкости (далее – НВ).

Коэффициент детерминации зависимости (1) равен 0,91, что, как утверждает исследователь, позволяет использовать ее в оптимизационных расчетах.

С помощью регрессионного анализа данных полевого опыта, проведенного в 2008–2010 гг. в тех же условиях, получена эмпирическая зависимость для рассадного лука [4]:

$$Y_{\text{лука}} = \frac{8,4 + 0,036N - 0,00016N^2 - 0,055W_{\text{пп}}}{1 - 0,0004N - 0,019W_{\text{пп}} + 0,0001W_{\text{пп}}^2}, \quad (2)$$

где $Y_{\text{лука}}$ – урожайность рассадного лука, т/га; N – доза внесения минерального азота как элемента, лимитирующего урожайность на малоплодородных светло-каштановых почвах Нижнего Поволжья, кг д. в./га; $W_{\text{пп}}$ – уровень предполивной влажности почвы, % от НВ.

Коэффициент детерминации (2) составляет 0,89.

Отсутствие какой-либо методической основы в обосновании структуры расчетных зависимостей вида (1) и (2) препятствует дальнейшему тиражированию подобного рода зависимостей.

2. *Эмпирические уравнения в виде полиномов 2-й степени*, полученные с использованием метода множественной нелинейной регрессии с включением в анализ различных нелинейных преобразований аргументов [5–7]. Например, по данным полевых исследований агротехники сладкого перца, возделываемого на орошаемых светло-каштановых почвах Российской Федерации (Волгоградская обл.), предложена эмпирическая зависимость его урожайности от уровня предполивной влажности и суммарной дозы вносимых удобрений [5]:

$$Y_{\text{перца}} = 211,5 + 5,89W_{\text{пп}} - 0,04W_{\text{пп}}^2 + 0,03F - 0,0000387F^2 + 0,000465W_{\text{пп}}F, \quad (3)$$

где $Y_{\text{перца}}$ – урожайность сладкого перца, т/га; $W_{\text{пп}}$ – уровень предполивной влажности почвы, % от НВ; F – суммарная доза удобрений (НРК), кг д. в./га.

Коэффициент детерминации (3) составляет 0,81.

По результатам другого полевого опыта, проведенного в 2005–2007 гг. в тех же условиях, предложены подобные зависимости для огурца [6]:

$$Y_{\text{огурца}_1} = -312,8 + 7,767W_{\text{пп}} + 0,011W_{\text{пп}}N - 0,050W_{\text{пп}}^2 - 0,003N^2, \quad (4)$$

$$Y_{\text{огурца}_2} = -328,4 + 8,138W_{\text{пп}} + 0,012W_{\text{пп}}N - 0,052W_{\text{пп}}^2 - 0,003N^2, \quad (5)$$

где $Y_{\text{огурца}_1}$ – урожайность стандартных плодов огурца при обычной агротехнике возделывания, т/га; $Y_{\text{огурца}_2}$ – урожайность стандартных плодов огурца при полосовом внесении соломы в увлажняемую зону, т/га; $W_{\text{пп}}$ – уровень предполивной влажности почвы, % от наименьшей влагоемкости; N – доза внесения элемента (азота), содержание кото-

рого в почве лимитирует повышение урожайности, кг д. в./га.

Коэффициенты детерминации (4) и (5) колеблются в пределах 0,93–0,95.

Для расчета урожайности моркови при капельном поливе рекомендовано использовать уравнение общего вида [7]:

$$Y = a + b \cdot h + c \cdot N + d \cdot h^2 + e \cdot N^2 + f \cdot h \cdot N, \quad (6)$$

где Y – урожайность моркови в зависимости от способа посева, т/га; a, b, c, d, e, f – коэффициенты, численные значения которых зависят от способа посева моркови; h – глубина промачивания почвы по вариантам опыта, м; N – доза внесения минерального азота как лимитирующего элемента плодородия почвы, кг д. в./га.

При этом отмечается, что в результате расчета по (6) получены коэффициенты детерминации 0,94–0,95, что характеризует хорошую согласованность теоретической поверхности отклика с опытными данными.

Авторы [3–7] называют предложенные ими эмпирические уравнения математическими моделями урожайности, указывая на высокие численные значения коэффициентов детерминации, подтверждающие высокую тесноту связи между аргументами функции и урожайностью. Вместе с тем существуют объективные причины, ограничивающие использование подобных эмпирических формул в земледельческой науке. Неоднократно было показано, **что эмпирические формулы в виде N-мерных полиномов при любом коэффициенте детерминации не являются действительными моделями исследуемых процессов, поскольку не имеют физического смысла, а представляют собой лишь формальное математическое сглаживание данных конкретных экспериментов** [8, 9].

Подобные эмпирико-статистические методики обработки данных полевого опыта [3–7] всегда приводят к частным решениям, результаты которых весьма сложно распространить даже на подобные исследования, но выполненные в других условиях. Единственным решением этой методологической проблемы, на наш взгляд, является уход от метода множественной нелинейной регрессии и переход к математическому моделированию, учитывающему определенные ограничения. Тем более, что в этом направлении научная работа ведет-

ся уже давно. Ниже представлены варианты подобного математического моделирования.

3. *Динамические модели урожайности*, опирающиеся на поэтапно рассчитываемый прирост урожайности культуры в процессе вегетации [10–13]. Например, еще в 1973 г. для построения зависимости урожайности от любого фактора жизни растений известными советскими учеными предлагалось использовать следующее дифференциальное уравнение [10]:

$$\frac{dU}{d\phi} = f[U(\phi_{\text{opt}} - \phi)], \quad (7)$$

где U – показатель жизнедеятельности растений; ϕ – значение рассматриваемого фактора влияния; ϕ_{opt} – его оптимальное значение, при котором показатель жизнедеятельности растения максимален.

Уравнение (7) записано для ограниченного временного отрезка. Конечный урожай, по мнению авторов, можно получить, суммируя показатели жизнедеятельности растений за весь период вегетации.

В 1976 г. было опубликовано методическое пособие [11], в котором совместное влияние температуры воздуха и осадков на формирование урожая основных зерновых культур предложено оценивать за весь вегетационный период с помощью формулы

$$S(T, R) = \frac{Y}{Y_{\text{max}}} = \frac{\sum_{j=1}^N \eta_j(T, R) \alpha_j}{\sum_{j=1}^N \alpha_j}, \quad (8)$$

где $S(T, R)$ – суммарный совместный коэффициент продуктивности за N периодов (фаз развития, месяцев) вегетационного цикла; Y – фактический урожай культуры; Y_{max} – максимальный урожай культуры, достижимый при оптимальном сочетании осадков и температуры воздуха; $\eta_j(T, R)$ – коэффициент продуктивности за j -й период; T – средняя за период температура воздуха; R – суммарное за период количество осадков; α_j – весовой коэффициент, учитывающий вклад j -го периода вегетационного цикла в урожайность.

Совместное влияние температуры воздуха и осадков на формирование урожайности в любой период вегетационного цикла оценивается как произведение соответствующих коэффициентов продуктивности [11]:

$$\eta(T, R) = \exp \left[-b \left(\frac{T - T_{\text{opt}}}{10} \right)^2 \right] \times \left(1 + \frac{R - R_{\text{opt}}}{R_{\text{opt}} - R_{\text{min}}} \right)^{b_1} \left(1 - \frac{R - R_{\text{opt}}}{R_{\text{max}} - R_{\text{opt}}} \right)^{b_2}, \quad (9)$$

где T_{opt} – оптимальная в данном периоде температура воздуха; R_{opt} – оптимальная в данном периоде сумма осадков; R_{min} – биологический минимум осадков; R_{max} – максимум осадков; b, b_1, b_2 – эмпирические коэффициенты.

В методическом пособии [11] В. П. Дмитренко приводит таблицы и номограммы, позволяющие определять значения параметров расчетных формул (8), (9) и коэффициенты продуктивности для озимой пшеницы, ярового ячменя, кукурузы раннеспелой, среднеспелой и позднеспелой, возделываемых в условиях Украины, а также рассматривает конкретные примеры использования предложенной методики на практике. Но за последующие годы об использовании в производственных условиях рекомендаций названного автора нам ничего неизвестно. Сложность состоит в очевидной трудоемкости практической реализации предложений (8)–(9).

В 1977 г. опубликована модель формирования урожая, построенная на базе теории энерго- и массообмена растительного сообщества с окружающей средой. В ее основу положено известное соотношение между поглощением растением углекислого газа из воздуха в процессе фотосинтеза и приростом общей биомассы [12]:

$$dy = k \cdot q \cdot dt, \quad (10)$$

где dy – приращение биомассы; k – отношение вновь образованного в растении сухого вещества к поглощенному углекислому газу; q – интенсивность поглощения углекислого газа; dt – приращение времени.

Решение дифференциального уравнения (10) выполнено автором с применением многочисленных упрощений, эмпирических интерпретаций и допущений. В конце статьи указывается, что для использования предложенной модели в целях оперативного управления комплексом факторов жизни растений необходимо измерять температуру и влажность воздуха на высоте 0,5 и 2,0 м над растительным покровом, радиационный баланс,

суммарную солнечную радиацию, поток тепла в почву, испарение с поверхности почвы, температуру и влажность почвы, содержание элементов питания в листьях [12]. Ясно, что проведение таких измерений в течение вегетации в производственных условиях неисполнимо.

Подобные трудности возникают и при реализации других подобных рекомендаций [13, 14]. Например, в 2007 г. в качестве модели урожайности предлагалась упрощенная зависимость, в которой развитие растения задавалось через индекс листовой поверхности, высоту растения и глубину корнеобитаемого слоя как линейные по времени функции фазы развития растений [14]. Расчет урожайности рекомендовалось производить по обобщающей формуле:

$$\frac{Y}{Y_{\text{max}}} = \prod_{j=1}^N \left[1 - k_{yj} \left(1 - \frac{E_j}{E_{\text{max}j}} \right) \right], \quad (11)$$

где j – фаза развития растения; N – число фаз развития; k_{yj} – коэффициент, названный фактором урожайности в j -ю фазу развития; E_j – фактическое суммарное водопотребление в j -ю фазу развития; $E_{\text{max}j}$ – максимальное суммарное водопотребление в j -ю фазу развития.

В качестве основной причины упрощения структуры теоретической модели до формулы (11) указано, что более сложные и точные модели роста и развития растений требуют большего количества труднополучаемой исходной информации и иногда могут давать физически невозможные результаты [14]. Этот вывод получен после детального анализа в 2000-е гг. теоретических моделей продукционного процесса, разработанных как российскими, так и зарубежными учеными.

Как видим, варианты модели урожайности (7)–(11), учитывающие динамику условий внешней среды, эффективны в научных исследованиях, но для практического использования непригодны.

Известны также варианты математической модели урожайности, которые не требуют учета динамичности условий внешней среды. Они дополняют вышепредставленный перечень.

4. *Обобщенные модели урожайности, основанные на учете только лимитирующего урожаяформирующего фактора.* К их числу

можно отнести формулу, опубликованную в 1997 г. [15]:

$$Y = Y_{\max} \exp \left[-4,5 \left(1 - \frac{f_i}{f_{\text{opt}}} \right)^2 \right], \quad (12)$$

где $\frac{f_i}{f_{\text{opt}}}$ – относительная величина лимитирующего фактора (отношение фактической его величины к оптимальной), оцениваемого в целом за вегетацию.

По утверждению автора приведенной формулы, результаты расчета по (12) дают ошибку, не превышающую в среднем 3,6 %. Однако и этот уникальный результат не получил дальнейшего практического применения.

5. *Обобщенные модели урожайности, основанные на учете неограниченного числа урожаяформирующих факторов.*

В 1990 г. была предложена обобщающая формула, предназначенная для учета влияния факторов жизни растений на урожай [16]:

$$Y = Y_{\max} \prod_{i=1}^n \left[1 - \left(1 - \frac{f_i}{f_{\text{opt}}} \right)^2 \right], \quad (13)$$

где n – число факторов, влияющих на урожай; $\frac{f_i}{f_{\text{opt}}}$ – относительная величина i -го фактора (отношение фактической его величины к оптимальной).

Применение уравнения (13) в практических расчетах не требует учета динамичности условий внешней среды. В вычислениях используются только значения урожаяформирующих факторов за вегетационный период (в формуле отсутствует фактор времени), что существенно упрощает прогноз ожидаемой урожайности по планируемым ресурсам: например, по вносимым удобрениям и почвенным влаготпасам, поддерживаемым с помощью орошения на заданном уровне. Вместе с тем формула (13) требует уточнения и, вероятно, поэтому до настоящего времени не используется при статистической обработке опытных данных по урожайности. Об этом свидетельствуют более поздние работы исследователей, прокомментированные выше [3–7].

Единственным верным решением этой методологической проблемы, на наш взгляд, является использование математического мо-

делирования, учитывающего определенные ограничения.

Ограничения математической модели урожайности. Основная особенность экспериментальных математических (статистических) моделей любого процесса заключается в том, что они описывают поведение объекта в среднем, характеризуя его неслучайные свойства. С помощью подобной модели нельзя абсолютно точно предсказать конечный результат в каждом опыте, но с ее помощью можно со свойственной данной модели погрешностью указать, вокруг какого центра будут группироваться значения функции при заданном сочетании показателей факторов (аргументов), если для этого сочетания опыты повторять многократно [1].

В целом *математическая модель объекта исследований – это математическое выражение, построенное с соблюдением баланса размерностей, содержательно отражающее свойства изучаемого объекта и количественные связи, его характеризующие. Каждый элемент математической модели, включая численные коэффициенты, должен иметь объяснимое физическое содержание.*

Исходя из данного определения при математическом моделировании урожайности сельскохозяйственных культур необходимо учитывать несколько ограничений (правил).

Первое правило. При построении модели урожайности в системе «факторы среды (аргументы) – урожайность (функция)» должны учитываться известные законы земледелия и установленные опытным путем закономерности:

1) растения – это система с памятью, то есть прирост урожая зависит от условий его формирования, определяемых факторами среды;

2) если условия среды (влага, пища, тепло и др.) находятся в оптимуме, то растения образуют максимум урожая;

3) при отклонении фактора от оптимального значения в любую сторону (к минимуму или к максимуму) растения испытывают стресс, который снижает урожай;

4) величина отклонения фактических значений факторов среды (доз вносимых удобрений, влагообеспеченности культуры, температуры воздуха и др.) от их оптимума определяет величину стресса, испытываемого растениями при формировании урожая;

5) с приближением условий среды к оптимальному прирост урожая замедляется;

6) урожаеформирующие факторы равноценны по влиянию на растения и не могут заменить друг друга;

7) наибольшее влияние на снижение урожая оказывает фактор, находящийся в минимуме.

Второе правило. Математическая модель урожайности не должна иметь ограничений по числу урожаеформирующих факторов, учитываемых в ней.

Третье правило. Продолжительность рядов, составляющих базу данных, используемых для верификации математической модели урожайности, должна не только обеспечить высокие показатели тесноты установленной при моделировании связи урожайности с урожаеформирующими факторами, но и гарантировать достоверность в определении опорных показателей модели.

Таким образом, при разработке математической модели урожайности необходимо обеспечить соблюдение следующих требований:

- структура модели должна соответствовать известным законам земледелия и закономерностям, установленным опытным путем и определяющим зависимость урожайности культуры от урожаеформирующих факторов;
- математическая модель урожайности не должна иметь ограничений по числу учитываемых в ней урожаеформирующих факторов;
- при верификации модели обязательным является наличие многолетних рядов урожайности и численных значений контролируемых факторов (не менее двух), влияющих на нее с продолжительностью, превышающей минимально необходимую.

Приведенным правилам не отвечают эмпирические формулы (1)–(6), хотя результаты расчета по ним могут иметь весьма высокие коэффициенты детерминации, подтверждающие тесную связь между аргументами и функцией.

Динамические модели урожайности (7)–(12) хотя и соответствуют указанным правилам, но на практике не применяются, что обусловлено необходимостью соблюдения трудоемких методик и затратных операций при их реализации.

В отличие от динамических в статистических моделях урожайности вида (13) рассматривается зависимость конечного урожая от суммарного влияния урожаеформирующих факторов не в процессе роста культуры, а сразу в целом за вегетацию. Безусловно, разработка статистической математической модели урожайности проще, чем динамическое моделирование. Но до настоящего времени продвижение научных исследований даже в этом направлении идет весьма медленно. Сложность состоит в недостатке квалификации и опыта математического моделирования у ученых-аграриев.

Ранее было отмечено, что наиболее обоснованным при построении математической модели любого объекта исследований является использование физического закона (принципа). Например, зависимость урожайности любой сельскохозяйственной культуры от урожаеформирующих факторов можно представить аналитически, выбрав в качестве методологической основы физический принцип баланса причинно-следственных взаимодействий (*causal interaction*) в замкнутой физической системе [17]. При анализе влияния факторов среды на урожайность культур исходные положения, на которых базируется математическое моделирование урожайности, не связываются с особенностями культур и природных условий, поэтому варианты модели универсальны по применению и действительны для любой сельскохозяйственной культуры независимо от региона возделывания. В качестве показателя влагообеспеченности культуры при отсутствии ее орошения используются атмосферные осадки [17, 18].

Установлено, что в условиях Беларуси урожаеформирующие факторы по результату своего воздействия на урожайность располагаются в следующей убывающей последовательности: суммарная доза содержащихся в почве и вносимых питательных веществ → сумма выпавших атмосферных осадков за активные фазы вегетации → температуры воздуха за тот же период. Расчеты показали, что уменьшение числа урожаеформирующих факторов, учитываемых в математической модели, с трех (пища, влага, тепло) до двух (пища, влага) снижает точность расчета урожайности несущественно [19].

Методика исследований

Формальным выражением физического принципа баланса причинно-следственных взаимодействий в замкнутой физической системе является уравнение в частных производных:

$$\frac{\partial Y}{\partial R_i} = \alpha_i f_i \left(\frac{Y}{R_i} \right) \frac{g_i(R_i)}{h_i(R_{iextr})}, \quad (14)$$

где $\partial Y/\partial R_i$ – частная производная урожайности (Y) по i -му урожаеформирующему фактору (R_i), соответствующая интенсивности изменения Y при изменении R_i , при условии, что другие факторы (аргументы функции) не изменяются; R_i – обобщенное представление i -го фактора; α_i – безразмерная константа, характеризующая восприимчивость урожая к действию i -го фактора (может изменяться от нуля – при полном отсутствии реакции урожайности – на i -й фактор и до единицы при полной зависимости от данного урожаеформирующего фактора); $f_i(Y/R_i)$ – функция, характеризующая интенсивность реакции урожайности на влияние i -го фактора в пределах рассматриваемого диапазона его воздействия; $g_i(R_i)$ – функция, характеризующая величину стресса растений в виде отклонения i -го фактора (R_i) от оптимального уровня; $h_i(R_{iextr})$ – функция, характеризующая экстремальный стресс от воздействия i -го фактора, приводящий к потере урожая.

В системе «факторы среды – урожайность» форму математической модели урожайности в зависимости от граничных условий, принимаемых при решении исходного уравнения (14), можно трансформировать от экспоненциальной до параболической [17, 19]. Наиболее простая параболическая форма имеет вид:

$$\frac{Y}{Y_{n(\max)}} = \prod_{i=1}^n \left[1 - a_i \left(\frac{R_{i(\text{opt})} - R_i}{R_{i(\text{opt})} - R_{i(\text{min,max})}} \right)^2 \right]. \quad (15)$$

Заметим, что благодаря мультипликативной форме зависимости (15) в ней, во-первых, априори соблюдается упомянутый выше закон минимума. Во-вторых, в отличие от использования известной методики планирования эксперимента [2], цель которой – построение регрессионных зависимостей в виде многочленных полиномов с ограниченным числом переменных, мультипликативная функция (15) не только является математической мо-

делью урожая, в которой каждая составляющая имеет конкретную физическую природу, но и может включать неограниченное число переменных.

Модель урожайности, учитывающая влияние на растения только двух урожаеформирующих факторов (питание и атмосферные осадки), согласно (15), трансформируется в уравнение

$$\frac{Y}{Y_{\max(\text{NPK}, S)}} = \left[1 - a_{\text{NPK}} \left(\frac{\text{NPK}_{\text{opt}} - \text{NPK}}{\text{NPK}_{\text{opt}} - \text{NPK}_{\text{min}}} \right)^2 \right] \times \left[1 - a_S \left(\frac{S_{\text{opt}} - S}{S_{\text{opt}} - S_{\text{min}}} \right)^2 \right], \quad (16)$$

где Y – расчетная урожайность сельскохозяйственной культуры; $Y_{\max(\text{NPK}, S)}$ – максимум (потенциал) урожайности, полученный при оптимальном сочетании питания и влагообеспеченности растений с учетом ее снижения при неоптимальности других, не учтенных в (14), урожаеформирующих факторов; a_{NPK} – константа, характеризующая степень влияния NPK на урожайность; NPK_{opt} – оптимальное количество питательных веществ (сумма действующего вещества азота, фосфора, калия), содержащихся в почве ($\text{N}_0\text{P}_0\text{K}_0$) и вносимых (NPK), при которых достигается максимум урожайности; NPK_{min} – минимальный граничный показатель суммы NPK, при которой урожай не формируется; a_S – константа, характеризующая степень влияния на урожайность выпадающих за активные фазы вегетации атмосферных осадков; S_{opt} – оптимальное количество (сумма) атмосферных осадков, при которой достигается максимум урожайности; S_{min} – минимальный граничный показатель суммы атмосферных осадков, при которой урожай не формируется.

Можно последовательно добавлять в модель (14) другие урожаеформирующие факторы, не нарушая ее структуру, которая справедлива для любой сельскохозяйственной культуры.

Для верификации математической модели урожайности должна использоваться база данных, содержащая объективную многолетнюю информацию с численными значениями учитываемых факторов, контроль за которыми

желательно сосредоточить в границах одного опытного участка при тщательном соблюдении методик исследований.

Опорные (постоянные) показатели математической модели урожайности (14), численные значения которых определяют положение поверхности отклика функции урожайности в многомерном пространстве, устанавливаются в процессе анализа опытных данных. К ним относятся показатели $Y_{\max(NPK,S)}$, a_{NPK} , NPK_{opt} , NPK_{min} , a_S , S_{opt} , S_{min} . Переменными показателями математической модели урожайности (14), которые формируют базу данных и получены в поле на сортоиспытательных станциях (участках) или в стационарных опытах, являются Y , NPK , S . Аналитическая работа с переменными показателями математической модели урожайности с целью установления численных значений опорных (постоянных) показателей выполняется методом подбора и в процессе изучения объективной информации, полученной в полевых условиях, требует детального знания предмета исследования,

Результаты исследования и его обсуждение

Справедливость формулы (16) проверена и подтверждена по данным урожайности сахарной свеклы (гибрид NZ-тип), возделываемой в Беларуси на сортоиспытательных станциях (Кобрин, Молодечно, Несвиж) и участке (Щучин) [20], а также в наших стационарных полевых опытах (Несвиж, Горки). Анализ полученных результатов показал, что коэффициент, характеризующий влияние уровня питания растений на урожайность, для всех сортоиспытательных станций близок к единице ($a_{NPK} \approx 1$). В то же время выявлена зависимость показателя, характеризующего степень влияния на урожайность атмосферных осадков, от расстояния между опытным участком и метеостанцией (метеопунктом), где велись измерения, причем значения этого коэффициента различаются для разных периодов.

В таблице приведены опорные показатели математической модели урожайности (16) для сахарной свеклы, установленные по данным ГСХУ «Несвижская СС» (продолжительность опыта 12 лет) и для опытных участков «Несвиж» и «Горки» (продолжительность опыта 3 года). Эти параметры, определяющие положение параболической поверхности отклика

то есть высокой квалификации исследователя, точного соблюдения методик полевого опыта.

Метод подбора опорных показателей математической модели (16) соответствует методу наименьших квадратов и ориентируется на минимизацию среднеквадратических (стандартных) отклонений урожаев, вычисленных по (16), от урожаев, измеренных в поле:

$$\delta = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{i=n} (\Delta Y_i)^2}{n-1}} \rightarrow \min, \quad (17)$$

$$\Delta Y_i = Y_{\text{выч. } i} - Y_i, \quad (18)$$

где δ – среднеквадратическое отклонение урожаев, вычисленных по формуле (16), от урожаев, замеренных в поле за n -летие; ΔY_i – отклонение урожая, вычисленного по формуле (16) в условиях i -го года, от урожая, измеренного в поле в i -м году; $Y_{\text{выч. } i}$ – урожай, вычисленный по формуле (14) для условий i -го года; Y_i – фактический урожай, полученный в поле в условиях i -го года; i – порядковый номер года в многолетии; n – количество лет в ряду.

функции урожайности на питание и влагообеспеченность (в трехмерном пространстве), устанавливаются в процессе анализа опытных данных методом подбора (с использованием метода наименьших квадратов). Для наглядности опорные показатели модели (16) (строки 20–26 таблицы) выделены полужирным шрифтом.

Данные таблицы демонстрируют тесную зависимость потенциала урожайности сахарной свеклы ($Y_{\max(NPK,S)}$) от исходного плодородия почвы ($N_0P_0K_0$). Но при этом нет уверенности, что потенциал урожайности и другие опорные показатели математической модели (16) действительно соответствуют условиям опыта – в данном случае с сахарной свеклой. Поэтому закономерен вопрос: можно ли построить математическую модель урожайности сельскохозяйственной культуры с достоверными опорными показателями по данным 3-летних исследований? Данный вопрос является ключевым, поскольку в подавляющем большинстве диссертационных исследований на соискание ученой степени кандидата наук используются результаты именно 3-летних опытов.

Таблица. Показатели математической модели урожайности сахарной свеклы (16)

№ п/п	Наименование	Размерность	СС «Несвиж»	ОУ «Несвиж»		ОУ «Горки»
			Аргументы модели			
			$N_0P_0K_0 + NPK, S$	$N_0P_0K_0 + NPK, S$	NPK, S	NPK, S
1	Годы наблюдений	годы	2011–2023	2021–2023		2017–2019
2	Пределы колебания Y	т/га	46,8–88,0	24,4–60,4		54,7–85,6
3	Y среднемноголетнее	т/га	68,5	44,8		69,2
4	Гумус	%	2,0–2,3	1,3–2,9	Данные не учитываются	Данные не учитываются
5	Гумус (среднее)	%	2,18	2,13		
6	P_2O_5	мг/кг	300–345	96–226		
7	P_2O_5 (среднее)	мг/кг	309	159		
8	K_2O	мг/кг	380–420	123–234		
9	K_2O (среднее)	мг/кг	403	178		
10	N_0	кг д. в./га	3000–3600	1950–4350		
11	N_0 (среднее)	кг д. в./га	3272	3200		
12	P_0	кг д. в./га	900–1035	288–678		
13	P_0 (среднее)	кг д. в./га	978	476		
14	K_0	кг д. в./га	1140–1260	369–702		
15	K_0 (среднее)	кг д. в./га	1210	533		
16	$N_0P_0K_0$	кг д. в./га	5040–5895	2607–5730		
17	$N_0P_0K_0$ (среднее)	кг д. в./га	5460	3209		
18	NPK	кг д. в./га	390–410	0–540	0–540	310–560
19	NPK (среднее)	кг д. в./га	397	280	280	448
20	$Y_{max}(NPK, S)$	т/га	95	70	70	89
21	a_{NPK}	б/р	1,0	0,76	1,00	1,00
22	NPK_{opt}	кг д. в./га	7000	9000	1000	700
23	NPK_{min}	кг д. в./га	4700	0	–650	0
24	a_S	б/р	0,32	0,97	0,93	1,00
25	$S_{opt}(V-IX)$	мм	400	460	460	300
26	$S_{min}(V-IX)$	мм	0	0	0	20
27	Стандартн. отклон. δ	т/га	3,15	3,59	3,64	3,19
28	Коэф. детермин. R^2	б/р	0,94	0,93	0,92	0,90

П р и м е ч а н и е. $N_0P_0K_0$ – суммы действующего вещества азота (N_0), фосфора (P_0), калия (K_0), содержащихся в почве, кг д. в./га; NPK – суммы действующего вещества азота (N), фосфора (P), калия (K), внесенного с удобрениями, кг д. в./га; S – сумма атмосферных осадков за май – сентябрь включительно, мм.

Установленные по исходным данным значения опорных показателей математической модели урожайности, приведенные в таблице, заставляют ответить на поставленный вопрос отрицательно. Несмотря на достаточно высокие коэффициенты детерминации, подтверждающие наличие тесной связи между полученной урожайностью сахарной свеклы и основными урожаеформирующими факторами (обеспеченностью питательными веществами и влагой), отчетливо видны искажения в численных значениях опорных показателей математической модели урожайности, уста-

Заключение

Анализ опорных показателей математической модели урожайности сахарной свеклы, полученных с использованием 12-летних результатов сортоиспытаний и данных 3-летних полевых исследований, показал, что существует зависимость потенциала урожайности сахарной свеклы от исходного плодородия почвы конкретного участка. Причем 3-летних данных, полученных на опытных участках, оказалось недостаточно для определения

новленных методом подбора по (16)–(18). По 3-летним данным ОУ «Несвиж» имеем явно завышенные значения оптимального количества питательных веществ (суммы действующего вещества азота, фосфора, калия, содержащихся в почве и вносимых), при которых достигается максимум урожая. По 3-летним данным опытного участка «Горки» получено резко заниженное количество оптимальных атмосферных осадков (сумма за май – сентябрь), при которых достигается максимум урожайности.

достоверных численных значений опорных показателей математической модели урожайности (16). Несмотря на весьма высокие коэффициенты детерминации, подтверждающие наличие тесной связи между полученной урожайностью сахарной свеклы, ее питанием и влагообеспеченностью, отчетливо видны искажения в значениях опорных показателей, установленных по 3-летним данным.

Библиографический список

1. Образцов, А. С. Системный подход: применение в земледелии / А. С. Образцов. – Москва : Агропромиздат, 1990. – 303 с.
2. Красовский, Г. И. Планирование эксперимента / Г. И. Красовский, Г. Ф. Филаретов. – Минск : Изд-во БГУ, 1982. – 303 с.
3. Шенцева, Е. В. Совершенствование агротехники выращивания баклажан при капельном орошении с использованием тоннельных укрытий для получения ранней продукции : автореф. ... дис. канд. с.-х. наук : 06.01.01, 06.01.02 / Е. В. Шенцева ; Саратов. гос. аграр. ун-т им. Н. И. Вавилова. – Саратов, 2012. – 23 с.
4. Богданенко, М. П. Технология возделывания рассадного лука при капельном орошении в Нижнем Поволжье : автореф. дис. ... канд. с.-х. наук : 06.01.01, 06.01.02 / М. П. Богданенко ; Саратов. гос. аграр. ун-т им. Н. И. Вавилова. – Саратов, 2012. – 24 с.
5. Овчинников, А. С. Урожайность сладкого перца при капельном орошении / А. С. Овчинников, О. В. Бочарникова, Т. В. Пантюшина // Мелиорация и вод. хоз-во. – 2007. – № 2. – С. 45–47.
6. Акулинина, М. А. Капельное орошение огурца в сухостепной зоне светло-каштановых почв Нижнего Поволжья : автореф. дис. ... канд. с.-х. наук : 06.01.02 / М. А. Акулинина ; Волгогр. гос. с.-х. акад. – Волгоград, 2010. – 23 с.
7. Пенькова, Р. И. Ресурсосберегающие технологии возделывания моркови при капельном орошении в условиях Нижнего Поволжья : автореф. дис. ... канд. с.-х. наук : 4.1.5 / Р. И. Пенькова ; Волгогр. гос. с.-х. акад. – Волгоград, 2023. – 20 с.
8. Вахонин, Н. К. Концептуальные основы моделирования урожайности в системе принятия решений по регулированию водного режима / Н. К. Вахонин // Мелиорация. – 2014. – № 2 (72). – С. 7–15.
9. Вахонин, Н. К. Моделирование урожая в системе точного земледелия / Н. К. Вахонин // Мелиорация. – 2015. – № 1 (73). – С. 131–136.

10. Аверьянов, С. Ф. Некоторые математические модели системы «растение – среда» / С. Ф. Аверьянов, В. В. Шабанов // Физическое и математическое моделирование в мелиорации. – Москва : Колос, 1973. – С. 293–295.
11. Дмитренко, В. П. Оценка влияния температуры воздуха и осадков на формирование урожая основных зерновых культур : метод. пособие / В. П. Дмитренко. – Ленинград : Гидрометеиздат, 1976. – 49 с.
12. Афанасик, Г. И. Моделирование процесса формирования урожая сельскохозяйственных культур / Г. И. Афанасик // Мелиорация торфяников и их сельскохозяйственное использование. – Минск : БелНИИМивХ, 1977. – Вып. 3. – С. 122–127.
13. Закржевский, П. И. Модель урожая и динамика факторов внешней среды / П. И. Закржевский // Мелиорация переувлажненных земель : сб. науч. тр. – Минск, 1977. – Т. XXV. – С. 95–105.
14. Ромко, А. В. Обоснование водного и питательного режима мелиорируемых земель гумидной зоны с использованием интегрированной модели агрогеосистемы : автореф. дис. ... канд. техн. наук : 06.01.02 / А. В. Ромко ; Всеросс. науч.-исслед. ин-т гидротехники и мелиорации им. А. Н. Костякова. – Москва, 2007. – 26 с.
15. Попов, В. А. Математическое выражение закона лимитирующего фактора и его приложение к задачам мелиоративного земледелия / В. А. Попов // Мелиорация и вод. хоз-во. – 1997. – № 2. – С. 30–34.
16. Механизация полива : справочник / Б. Г. Штепа [и др.]. – Москва : Агропромиздат, 1990. – 336 с.
17. Лихацевич, А. П. Использование математического моделирования для повышения достоверности оценки результатов полевого агрономического опыта / А. П. Лихацевич // Вес. Нац. акад. наук Беларусі. Сер. аграр. навук. – 2018. – Т. 56, № 3. – С. 321–334.
18. Выбор показателя водного режима в математической модели урожайности сахарной свеклы / А. П. Лихацевич, Г. В. Латушкина, А. А. Левкевич, А. В. Малышко, М. Н. Титова // Мелиорация. – 2022. – № 4 (102). – С. 45–54.
19. Лихацевич, А. П. Математическая модель урожая сельскохозяйственных культур / А. П. Лихацевич // Вес. Нац. акад. наук Беларусі. Сер. аграр. навук. – 2021. – Т. 59, № 3. – С. 304–318.
20. Лихацевич, А. П. Оценка комплексного влияния водно-пищевого режима на урожайность сахарной свеклы / А. П. Лихацевич, Г. В. Латушкина, А. В. Малышко // Мелиорация. – 2023. – № 3 (105). – С. 22–35.

Поступила 12 марта 2024 г.