

## ОЦЕНКА КОМПЛЕКСНОГО ВЛИЯНИЯ ВОДНО-ПИЩЕВОГО РЕЖИМА НА УРОЖАЙНОСТЬ САХАРНОЙ СВЕКЛЫ

**А. П. Лихацевич<sup>1</sup>**, доктор технических наук

**Г. В. Латушкина<sup>1</sup>**, кандидат технических наук

**А. В. Малышко<sup>2</sup>**, заведующий отделом

<sup>1</sup>РУП «Институт мелиорации», г. Минск, Беларусь

<sup>2</sup>РУП «Опытная научная станция по сахарной свекле», г. Несвиж, Беларусь

### Аннотация

Математическое моделирование зависимости урожайности сахарной свеклы от уровня питания и влагообеспеченности выполнено на основе физического принципа причинно-следственных взаимодействий (*causal interaction*) в замкнутой физической системе с использованием данных сортоиспытательных станций (г. Кобрин, Молодечно, Несвиж) и сортоиспытательного участка (г. Щучин). Установлены опорные показатели математической модели зависимости урожайности сахарной свеклы от факторов питания и влагообеспеченности. Отмечена необходимость дополнения применяемой методики сортоиспытаний сельскохозяйственных культур контролем за атмосферными осадками и температурами воздуха непосредственно на территории возделывания культур.

**Ключевые слова:** урожайность, питание растений, атмосферные осадки, температуры воздуха, причинно-следственные взаимодействия, опорные показатели математической модели урожайности.

### Abstract

**A. P. Likhatchevich, G. V. Latushkina, A. V. Malyshko**

### ASSESSMENT OF THE COMPLEX INFLUENCE OF THE WATER AND NUTRITIONAL REGIME ON THE YIELD OF SUGAR BEET

Mathematical modeling of the dependence of sugar beet yield on the level of nutrition and moisture content was performed on the basis of the physical principle of cause-and-effect interactions (*causal interaction*) in a closed physical system using data from variety testing stations (Kobrin, Molodechno, Nesvizh) and a variety testing site (Shchuchin). The reference indicators of the mathematical model of the dependence of sugar beet yield on nutrition factors and moisture supply have been established. The necessity of supplementing the method of variety testing of agricultural crops with the control of atmospheric precipitation and air temperatures directly in the territory of cultivation of crops is noted.

**Keywords:** productivity, plant nutrition, atmospheric precipitation, air temperature, cause-and-effect interactions, reference indicators of the mathematical model of productivity.

### Введение

Теоретической основой представления результатов исследований в сельскохозяйственной науке являются математическая статистика и теория вероятности с применением в основном эмпирических форм обобщения опытных данных. Весьма редко используется математический аппарат теории планирования эксперимента. Это вполне объяснимо, поскольку основные положения теории планирования эксперимента справедливы при проведении активного опыта, в котором могут присутствовать только управляемые переменные [1]. В аграрной науке, связанной с изучением воздействия на сельскохозяйственные

культуры не только техногенных управляемых, но и природных неуправляемых факторов с непредсказуемой динамикой, использование математической теории планирования эксперимента весьма ограничено. Поэтому для цифрового описания изучаемых процессов (например, результатов воздействия условий окружающей среды на урожай) привлекается неконтролируемое множество эмпирических уравнений произвольной структуры, зависящих от субъективных предпочтений их авторов [2–14].

Вместе с тем существуют объективные причины, ограничивающие использование

подобных эмпирических формул в земледельческой науке. Неоднократно было показано, что эти формулы при любом коэффициенте детерминации не являются действительными моделями исследуемых процессов, поскольку не имеют физического смысла, а представляют собой лишь формальное математическое сглаживание данных конкретных экспериментов [15, 16]. Поэтому эмпирико-статистические методики обработки данных полевого опыта всегда частное решение, результаты которого весьма сложно использовать даже в подобных исследованиях, но выполненных в других условиях. Множество эмпирических зависимостей, предлагаемых для обобщения опытных данных, в земледельческой науке прогрессивно растет, вступая в противоречие с традиционным стремлением ученых к единообразию и порядку, свойственным высокоорганизованному научному анализу. Остро ощущается необходимость разработки единой методологии обработки данных полевого агрономического опыта.

### Математическая модель урожайности

Процесс формирования урожая в течение вегетации можно представить как функцию, в которой аргументами являются урожайформирующие факторы (природные и техногенные). Накопление урожая можно рассматривать, например, в динамике роста (от начала вегетации до уборки урожая) как следствие воздействия факторов, изменяющихся во времени. Подобную динамическую модель урожая предлагал, например, В. П. Дмитренко [17]. Отсутствие теоретического развития подобного моделирования и практического его применения в течение последних 45 лет связано не столько со сложностью модели, сколько с ограниченной для исследователей возможностью ее полного цифрового наполнения.

В отличие от динамической, в статической модели урожая рассматривается зависимость конечного урожая от суммарного влияния урожайформирующих факторов не в процессе роста культуры, а сразу в целом за вегетацию. Безусловно, разработка статической математической модели урожая проще, чем проведение динамического моделирования. Несмотря на это, до настоящего времени в аграрной науке продвижение научных исследований

Математическая модель объекта исследований – это математическое выражение, содержательно отражающее свойства изучаемого объекта, в частности структуру и количественные связи, его характеризующие. Как и в математической теории планирования эксперимента, при моделировании урожайности нами рассматривается модель, основанная на результатах эксперимента, то есть экспериментальная математическая модель, которую можно отнести к статистическим моделям [1]. Основная особенность экспериментальных математических (статистических) моделей заключается в том, что они описывают поведение объекта в среднем, характеризуя его неслучайные свойства. С помощью подобной модели нельзя абсолютно точно предсказать конечный результат в каждом опыте, но можно со свойственной данной модели погрешностью указать, вокруг какого центра будут группироваться значения при заданном сочетании показателей факторов, если для этого сочетания опыты повторять многократно.

даже в статическом моделировании идет весьма медленно, хотя именно здесь следует ожидать прорывных результатов.

Зависимость урожайности любой сельскохозяйственной культуры от урожайформирующих факторов можно представить аналитически, выбрав в качестве методологической основы физический принцип баланса причинно-следственных взаимодействий (*causal interaction*) в замкнутой физической системе [18].

При этом необходимо учесть известные законы земледелия и установленные опытным путем закономерности [2–18]:

- 1) растения – это система с памятью, то есть прирост урожая зависит от условий его формирования, определяемых факторами среды;
- 2) если условия среды (влаги, пищи, тепла и др.) находятся в оптимуме, то растения реализуют максимум урожайности;
- 3) при отклонении фактора от оптимального значения в любую сторону (к минимуму или к максимуму) растения испытывают стресс, который снижает урожай;
- 4) величина отклонения фактических значений факторов среды (пищи, влагообеспе-

ценности культуры, температур воздуха и др.) от их оптимума определяет величину стресса, испытываемого растениями при формировании урожая;

5) с приближением условий среды к оптимуму прирост урожая замедляется;

6) урожаеформирующие факторы равноценны по влиянию на растения и не могут заменить друг друга;

7) наибольшее влияние на снижение урожая оказывает фактор, находящийся в минимуме (закон минимума).

Физический принцип баланса причинно-следственных взаимодействий в замкнутой физической системе в рамках данной задачи формулируется следующим образом [18]:

1) бесконечно малое изменение урожайности под воздействием конкретного урожаеформирующего фактора пропорционально произведению управляющего воздействия данного фактора на показатель восприимчивости урожая к его действию;

2) каждый из факторов, действующих на урожай, сообщает ему изменение, не зависящее от воздействий других факторов.

Заметим, что сформулированный выше физический принцип баланса причинно-следственных взаимодействий в замкнутой физической системе предполагает независимость урожаеформирующих факторов друг от друга. Формально этот принцип для математической модели урожая можно представить в виде обобщающего выражения

$$\frac{\partial Y}{\partial R_i} = \alpha_i f_i \left( \frac{Y}{R_i} \right) g_i(R_i), \quad (1)$$

где  $\partial Y / \partial R_i$  – частная производная функции урожая ( $Y$ ) по  $i$ -му фактору ( $R_i$ ), соответствующая интенсивности изменения  $Y$  при изменении  $R_i$  при условии, что другие факторы (аргументы функции) не изменяются;  $\alpha_i$  – безразмерная константа (может изменяться от нуля при полном отсутствии реакции на  $i$ -й фактор до единицы при полной зависимости от данного урожаеформирующего фактора);  $f_i(Y/R_i)$  – функция, характеризующая восприимчивость урожая к действию  $i$ -го фактора в пределах рассматриваемого диапазона его воздействия;  $R_i$  – обобщенное представление  $i$ -го фактора;  $g_i(R_i)$  – функция, характеризующая управляющее воздействие  $i$ -го фактора ( $R_i$ ) на урожай ( $Y$ ).

Функции, входящие в (1), должны учитывать известные законы земледелия и установленные опытным путем закономерности, которые формируют поле контролируемых переменных ( $Y, R_i$ ). Например, управляющее воздействие любого урожаеформирующего фактора на урожай  $g_i(R_i)$  соотносится с позициями 2-4 представленного выше перечня установленных в опытах закономерностей.

Кроме того, известно, что растения как объект воздействия условий окружающей среды при формировании урожая накладывают двустороннее ограничение (по минимуму и максимуму) на каждый фактор.

Исходя из отмеченных граничных условий, упростим задачу и будем рассматривать только интересующие нас области зависимости урожая от урожаеформирующих факторов. Например, при направленном регулировании пищевого режима наиболее предпочтительно построение модели в области с повышением доз вносимых удобрений от некоторого минимума до оптимального уровня, а при регулировании водного режима растений следует отдельно анализировать области либо снижения влагообеспеченности от максимума до оптимума (при ликвидации переувлажнения), либо ее целенаправленного повышения от минимума до оптимума (при проведении дополнительного увлажнения в засушливых условиях). В свою очередь, поскольку тепловой фактор в полевых опытах, как правило, не регулируется, в анализе можно использовать и область роста теплового воздействия на урожай (от оптимума до максимума), и область недостатка тепла (от минимума до оптимума). Выбор зависит от региона исследований и предпочтений автора моделирования.

Раскроем процесс наполнения функции (1) конкретной информацией на примере построения зависимости урожая от воздействия основного (первого) по значимости фактора ( $R_1$  – уровень минерального питания растений). Для этого можно использовать несколько математических выражений. Например, в нашем исследовании [18] составные элементы выражения (1), формализующего принцип баланса причинно-следственных взаимодействий в системе «факторы среды (причина) – урожайность (следствие)», приведены в наиболее сложной форме с целью ох-

ватить всё поле контролируемых переменных, управляющих поведением функции в пределах  $0 \leq Y \leq Y_{\max}$ . Однако в полевых опытах и в производственных условиях такой диапазон изменения урожая, как правило, не наблюдается. Обычно этот диапазон ограничивается пределами  $Y_{\min} \leq Y \leq Y_{\max}$ . Результаты анализа многочисленных данных [2–18] показывают, что принцип баланса причинно-следственных взаимодействий в системе «факторы среды (причина) – урожайность (следствие)» можно представить в упрощенном виде в пределах, симметричных относительно оптимального значения  $i$ -го фактора, при котором урожай достигает своего максимума:

$$0,25 < \frac{R_i}{R_{i(\text{opt})}} < 1,75, \quad (2)$$

где  $R_{i(\text{opt})}$  – оптимальное значение  $i$ -го фактора, при котором урожай реализует свой потенциал (достигает своего максимума).

При этом можно принять за основу следующие простейшие функции, не противоречащие упомянутым законам земледелия и установленным закономерностям:

- реакция растений на воздействие  $i$ -го фактора пропорциональна отношению величины потенциала урожайности (по  $i$ -му фактору) к максимально возможной величине стресса растения от недостатка  $i$ -го фактора до оптимума:

$$f_i \left( \frac{Y}{R_i} \right) = \frac{Y_{i(\text{max})}}{R_{i(\text{opt})} - R_{i(\text{min,max})}}, \quad (3)$$

где  $Y$  – урожай;  $Y_{i(\text{max})}$  – максимум урожая по  $i$ -му фактору (с учетом его снижения, вызванного неоптимальностью других урожаеформирующих факторов);  $R_{i(\text{min,max})}$  – условное минимальное или максимальное значение  $i$ -го фактора, при котором урожай не формируется;

- управляющее воздействие  $i$ -го фактора на урожай равно отношению фактического недостатка фактора до оптимума к возможному максимуму этого недостатка, то есть:

$$g_i(R_i) = \frac{R_{i(\text{opt})} - R_i}{R_{i(\text{opt})} - R_{i(\text{min,max})}}. \quad (4)$$

С учетом зависимостей (3) и (4) решением дифференциального уравнения (1) является:

$$\frac{Y}{Y_{n(\text{max})}} = \prod_{i=1}^n \left[ 1 - a_i \left( \frac{R_{i(\text{opt})} - R_i}{R_{i(\text{opt})} - R_{i(\text{min,max})}} \right)^2 \right], \quad (5)$$

где  $Y_{n(\text{max})}$  – максимум урожая по  $n$  факторам (с учетом его снижения, вызванного неоптимальностью других неучтенных урожаеформирующих факторов);  $n$  – количество учтенных факторов.

Заметим, что модель (5) симметрична относительно оптимальных значений урожаеформирующих факторов, поэтому использование в ней условно минимального или максимального значений  $i$ -го фактора дает один и тот же результат. Причем, благодаря мультипликативной форме в модели (5), во-первых, априори соблюдается вышеупомянутый закон минимума. Во-вторых, в отличие от известной методики планирования эксперимента [1], цель которой – построение регрессионных зависимостей в виде многочленных полиномов с ограниченным числом переменных, мультипликативная функция (5) не только является математической моделью урожая, в которой каждая составляющая имеет конкретную физическую природу, но и может включать неограниченное число ( $n$ ) переменных.

Известно, что максимальная урожайность может быть получена, если все урожаеформирующие факторы имеют оптимальное значение для конкретной культуры. Этот урожай соответствует биологическому потенциалу культуры. При отклонении значения любого из урожаеформирующих факторов от оптимума урожайность снижается. Если в оптимуме находится один урожаеформирующий фактор, а остальные вне его, то максимальная урожайность будет потенциальной только для данного фактора, что ниже биологического потенциала культуры. Если же в оптимуме будут находиться несколько факторов, то урожайность станет потенциальной только для этих факторов, что также ниже биологического потенциала культуры. Из сказанного следует, что чем больше урожаеформирующих факторов учитываются при моделировании урожайности, тем ближе потенциал урожайности этих факторов ( $Y_{n(\text{max})}$ ) к биологическому потенциалу культуры:

$$\lim_{n \rightarrow N} Y_{n(\text{max})} = Y_{\text{bio}}, \quad (6)$$



где  $Y_{n(\max)}$  – максимум урожая по  $n$  факторам (с учетом его снижения, вызванного неоптимальностью  $N-n$  неучтенных урожаеформирующих факторов);  $N$  – общее количество всех факторов, формирующих урожай;  $Y_{bio}$  – биологический потенциал урожайности культуры.

Таким образом, согласно (6), максимальный урожай соответствует биологическому потенциалу культуры только при учете в модели (1) всех урожаеформирующих факторов.

Наиболее сложное и ответственное действие в предлагаемой нами схеме математического моделирования урожая – установление исходных зависимостей вида (3), (4). В первую очередь при этом требуется соблюдать следующие условия: *необходимым условием* является полное соответствие предлагаемых зависимостей физическим закономерностям, объективно установленным в опытах; *достаточное условие* состоит в обязательном соблюдении баланса размерностей всех показателей, входящих в предлагаемые формы связи (3) и (4).

Конкретизируем формулу (5), рассматривая на первом этапе только воздействие минерального питания растений на урожай. В этом случае

$$\frac{Y}{Y_{NPK(\max)}} = \left[ 1 - a_{NPK} \left( \frac{NPK_{opt} - NPK}{NPK_{opt} - NPK_{min}} \right)^2 \right], \quad (7)$$

где  $Y_{NPK(\max)}$  – максимум урожая (потенциал урожайности), полученный при оптимальном уровне питания (оптимальной суммарной дозе NPK) с учетом его снижения при неоптимальности других неучтенных урожаеформирующих факторов;  $a_{NPK}$  – константа, характеризующая степень влияния пищи на урожай;  $NPK_{opt}$  – оптимальное количество питательных веществ (сумма действующего вещества азота, фосфора, калия в почве и вносимых), при которых достигается максимум урожая;  $NPK_{min}$  – условный граничный показатель суммы NPK (сумма содержащихся в почве и вносимых), при которой урожай не формируется.

Общую модельную функцию (5) и ее частное выражение (7) можно применять в любых регионах и любых почвенно-климатических условиях. Причем исходные положения, использованные нами при указанных выше теоретических построениях, не связаны с какими-либо ограничениями. Поэтому математическая модель урожая, представленная в виде криволинейной функции (7), действительна

в области (2) для любой сельскохозяйственной культуры в любых условиях ее возделывания.

Сложность использования в расчетах зависимости урожайности культуры от уровня питания (сумм действующего вещества азота, фосфора и калия, содержащихся в почве и вносимых) проистекает из-за отсутствия согласования размерностей данных показателей, рассчитываемых по разным методикам. Дозы вносимых удобрений (NPK) измеряют в кг действующего вещества на гектар (кг д. в./га). А содержание в почве азота определяют по наличию гумуса (измеряется в процентах), содержание фосфора ( $P_2O_5$ ) и калия ( $K_2O$ ) измеряют в мг/кг (миллиграммов вещества в килограмме почвы). Но для расчета по (6) все размерности необходимо согласовать, то есть привести к одной. Для этого используется методика, разработанная в РУП «Институт почвоведения и агрохимии». Суть ее состоит в следующем.

1) Принято считать, что вес пахотного слоя составляет 3000 тонн (площадь 1 га – 10 000 м<sup>2</sup>, средняя глубина пахотного слоя дерново-подзолистых почв – 25 см, средняя плотность пахотного слоя дерново-подзолистых почв – 1,2 г/см<sup>3</sup>, или 1,2 т/м<sup>3</sup>; таким образом, 10 000 м<sup>2</sup> × 0,25 м × 1,2 т/м<sup>3</sup> = 3000 т).

2) Содержание легкогидролизуемого азота в почве можно рассчитать по содержанию гумуса: в гумусе 5 % азота, содержание легкогидролизуемого азота (по обобщенным данным Всероссийского научно-исследовательского института агрохимии имени Д. Н. Прянишникова) в дерново-подзолистых почвах составляет в среднем 3 % от общего количества. Коэффициент использования составляет 55 %. Например, гумуса в почве 2 %. Если масса пахотного слоя на 1 га равна 3000 т, то гумуса в нем 60 т, общего азота – 3 т, а легкогидролизуемого азота – 90 кг/га, доступного азота для растений – 90 × 0,55 = 50 кг/га.

3) Коэффициент использования фосфора из почвы составляет 10 % от валового содержания. Например, содержание фосфора 200 мг/га, следовательно, 200 × 3 × 0,1 = 60 кг/га.

4) Коэффициент использования калия из почвы составляет 13 % от валового содержания. Например, содержание калия 250 мг/кг, следовательно, 250 × 3 × 0,13 = 97,5 кг/га.

### Результаты исследований и их обсуждение

Проверим работоспособность формулы (7) по данным урожайности сахарной свеклы (гибрид NZ – тип), возделываемой в свеклосеющей зоне Беларуси на сортоиспытательных станциях (гг. Кобрин, Молодечно, Несвиж) и сортоиспытательном участке (г. Щучин).

В табл. 1 приведены характеристики уровня питания и урожайность сахарной свеклы за многолетний период. При проведении расчета исключены данные ГСХУ «Несвижская СС» за 2016 г. вследствие выявленной ошибки в определении содержания в почве фосфора ( $P_2O_5$ ). Данные Щучинского ГСУ за 2021 и 2022 гг. отсутствуют по причине их выбраковки Государственной комиссией.

В указанной таблице приняты следующие обозначения:  $N_0$  – содержание в почве азота;  $P_0$  – содержание в почве фосфора;  $K_0$  – содержание в почве калия;  $N_0P_0K_0$  – суммарное содержание в почве азота, фосфора, калия;  $N_B$

– внесено в почву азота;  $P_B$  – внесено в почву фосфора;  $K_B$  – внесено в почву калия;  $N_BP_BK_B$  – суммарное внесение в почву азота, фосфора, калия;  $(N_0P_0K_0 + N_BP_BK_B)$  – суммарное количество содержащихся в почве и внесенных азота, фосфора, калия.

При анализе результатов, полученных в расчетах по формуле (7), установлено, что коэффициент, характеризующий степень влияния уровня питания растений на урожайность для всей свеклосеющей зоны Беларуси, равен единице ( $a_{NPK} = 1$ ).

Для сокращения написания формул, используемых далее в анализе, примем следующее обозначение:

$$NPK = N_0P_0K_0 + N_BP_BK_B. \quad (8)$$

На рис. 1 показаны построенные по данным табл. 1 графики связи урожайности сахарной свеклы с уровнем питания растений.

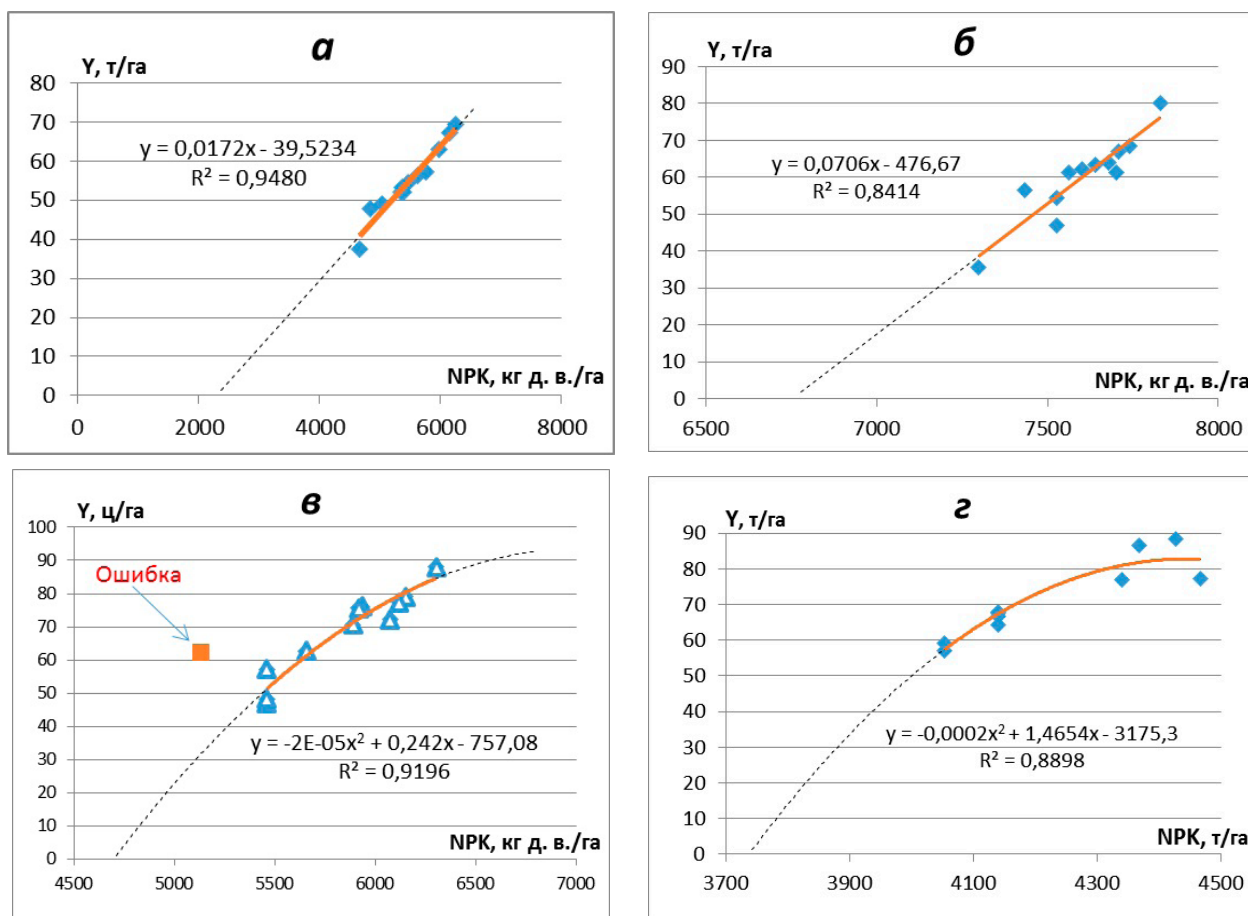


Рис. 1. Графики связи урожайности сахарной свеклы с уровнем питания:  
 а – ГСХУ «Кобринская СС»; б – ГСХУ «Молодечненская СС»;  
 в – ГСХУ «Несвижская СС»; г – Щучинский ГСУ

Таблица 1. Содержание элементов питания и урожайность сахарной свеклы

№ п/п	Год	Агрохимические показатели почвы				Содержание в почве						Внесено					Сумма	Урожайность
		Гумус %	P <sub>2</sub> O <sub>5</sub>	K <sub>2</sub> O	N <sub>0</sub>	P <sub>0</sub>	K <sub>0</sub>	N <sub>0</sub> P <sub>0</sub> K <sub>0</sub>	N <sub>B</sub>	P <sub>B</sub>	K <sub>B</sub>	N <sub>B</sub> P <sub>B</sub> K <sub>B</sub>	NRK	т/га				
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14		15			
ГСХУ «Кобринская СС»																		
1	2011	1,9	390	410	2850	1170	1230	5250	110	90	180	380	5630	56,4				
2	2012	2,15	410	430	3225	1230	1290	5745	120	90	200	410	6155	67,1				
3	2013	1,95	390	420	2925	1170	1260	5355	110	90	200	400	5755	57,2				
4	2014	1,64	320	370	2460	960	1110	4530	90	60	150	300	4830	47,9				
5	2015	1,6	315	360	2400	945	1080	4425	60	45	140	245	4670	37,5				
6	2016	2,1	380	430	3150	1140	1290	5580	120	60	210	390	5970	63,1				
7	2017	2,2	420	430	3300	1260	1290	5850	130	60	210	400	6250	69,5				
8	2018	1,84	350	410	2760	1050	1230	5040	110	45	180	335	5375	53,3				
9	2019	1,85	360	410	2775	1080	1230	5085	110	60	200	370	5455	54,5				
10	2020	1,84	380	380	2760	1140	1140	5040	90	60	150	300	5340	52,0				
11	2021	1,72	330	390	2580	990	1170	4740	90	60	150	300	5040	49,0				
12	2022	1,83	370	410	2745	1110	1230	5085	90	70	150	310	5395	52,0				
ГСХУ «Молодечная СС»																		
1	2011	3,62	335	350	5430	1005	1050	7485	136	90	120	346	7831	80,2				
2	2012	3,45	319	334	5175	957	1002	7134	120	90	90	300	7434	56,4				
3	2013	3,53	321	321	5295	963	963	7221	130	90	120	340	7561	61,4				
4	2014	3,6	325	321	5400	975	963	7338	130	90	120	340	7678	63,9				
5	2015	3,4	319	314	5100	957	942	6999	120	90	90	300	7299	35,6				
6	2016	3,58	322	321	5370	966	963	7299	130	90	120	340	7639	63,4				
7	2017	3,55	324	321	5325	972	963	7260	130	90	120	340	7600	62,1				
8	2018	3,62	325	321	5430	975	963	7368	130	90	120	340	7708	67,1				
9	2019	3,62	320	324	5430	960	972	7362	130	90	120	340	7702	61,2				
10	2020	3,55	320	314	5325	960	942	7227	120	90	90	300	7527	54,3				
11	2021	3,55	320	314	5325	960	942	7227	120	90	90	300	7527	46,8				
12	2022	3,62	315	325	5430	945	975	7350	120	90	180	390	7740	68,4				

Окончание табл. 1

№ п/п	Год	Агрохимические показатели почвы				Содержание в почве						Внесено						Сумма	Урожайность
		Гумус %	P <sub>2</sub> O <sub>5</sub>	K <sub>2</sub> O	N <sub>0</sub>	P <sub>0</sub>	K <sub>0</sub>	N <sub>0</sub> P <sub>0</sub> K <sub>0</sub>	N <sub>B</sub>	P <sub>B</sub>	K <sub>B</sub>	N <sub>B</sub> P <sub>B</sub> K <sub>B</sub>	P <sub>B</sub>	K <sub>B</sub>	N <sub>B</sub> P <sub>B</sub> K <sub>B</sub>	NPК	т/га		
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	кг действующего вещества / га				
ГСУ «Несвижская СС»																			
1	2011	2,2	323	410	3300	969	1230	5499	120	90	180	390	5889	70,6					
2	2012	2,3	344	420	3450	1032	1260	5742	120	90	200	410	6152	79,0					
3	2013	2,2	332	410	3300	996	1230	5526	120	90	200	410	5936	76,2					
4	2014	2,2	330	406	3300	990	1218	5508	120	90	200	410	5918	75,7					
5	2015	2,1	316	390	3150	948	1170	5268	120	90	180	390	5658	62,8					
6	2016	2,1	120	410	3150	360	1230	4740	120	90	180	390	5130	62,3					
7	2017	2,4	345	420	3600	1035	1260	5895	120	90	200	410	6305	88,0					
8	2018	2,0	310	380	3000	930	1140	5070	120	90	180	390	5460	57,2					
9	2019	2,3	340	420	3450	1020	1260	5730	120	90	180	390	6120	77,4					
10	2020	2,0	300	390	3000	900	1170	5070	120	90	180	390	5460	46,8					
11	2021	2,3	335	410	3450	1005	1230	5685	120	90	180	390	6075	72,1					
12	2022	2	310	380	3000	930	1140	5070	120	90	180	390	5460	48,2					
Щучинский ГСУ																			
1	2011	1,49	428	223	2235	1284	669	4188	60	60	120	240	4428	88,5					
2	2012	1,45	428	223	2175	1284	669	4128	60	60	120	240	4368	86,5					
3	2013	1,45	428	214	2175	1284	642	4101	60	60	120	240	4341	77,0					
4	2014	1,35	415	210	2025	1245	630	3900	60	60	120	240	4140	67,9					
5	2015	1,35	415	210	2025	1245	630	3900	60	60	120	240	4140	64,2					
6	2016	1,35	415	210	2025	1245	630	3900	60	60	120	240	4140	67,6					
7	2017	1,35	415	210	2025	1245	630	3900	60	60	120	240	4140	66,6					
8	2018	1,50	435	224	2250	1305	672	4227	60	60	120	240	4467	77,4					
9	2019	1,28	425	206	1920	1275	618	3813	60	60	120	240	4053	59,3					
10	2020	1,28	425	206	1920	1275	618	3813	60	60	120	240	4053	57,2					



Как видим, связь между уровнем питания и урожайностью сахарной свеклы подтверждается для всех сортоиспытательных станций (Кобрин, Молодечно, Несвиж) и сортоиспытательного участка (Щучин).

Важно то, что при установлении зависимости урожайности культуры от уровня ее питания необходимо внимательно анализировать первичную информацию и обязательно исключать из анализа резко выделяющиеся значения в исходных данных, что и сделано выше (рис. 1 в).

Приведенные на рис. 1 графики демонстрируют различную форму связи  $Y(NPK)$ . Если для ГСХУ «Несвижская СС» и Щучинского ГСУ подтверждена справедливость параболической зависимости вида (7), то для ГСХУ «Кобринская СС» и «Молодечненская СС» оказалась приемлемой линейная зависимость. Для устранения данного несоответствия сошлемся на закон минимума и установленную в опытах законо-

мерность: с приближением условий среды (в данном случае уровня питания) к оптимуму прирост урожая замедляется. В соответствии с ними анализ в дальнейшем будем выполнять только с использованием функции вида (7).

Выбранные из табл. 1 исходные показатели для математического моделирования урожайности сахарной свеклы по всем анализируемым ГСХУ и ГСУ представлены в сводной табл. 2, где можно проследить взаимозависимость между некоторыми показателями, определяющими уровень питания растений. Например, на посевах сахарной свеклы подтверждается отрицательная связь между содержанием в почве  $P_2O_5$  (более 320 мг/кг) и содержанием гумуса (рис. 2).

В табл. 3 приведены опорные показатели математической модели урожайности сахарной свеклы, полученные при построении математической модели урожайности сахарной свеклы по формуле (7).

Таблица 2. Исходные показатели математической модели урожайности сахарной свеклы

№ п/п	Наименование	Размерность	Сортоиспытательные станции и участок			
			Кобрин	Молодечно	Несвиж	Щучин
1	Продолжительность наблюдений	лет	12	12	11	10
2	Урожайность	т/га	37,5–69,5	35,6–80,2	46,8–88,0	57,2–88,5
3	Урожайность (средне-многолетняя)	т/га	55	59,3	68,5	71,2
4	Гумус	%	1,6–2,2	3,40–3,62	2,0–2,3	1,28–1,50
5	Гумус (ср.)	%	1,89	3,55	2,18	1,39
6	$P_2O_5$	мг/кг	315–420	319–335	300–345	415–435
7	$P_2O_5$ (ср.)	мг/кг	368	323	309	423
8	$K_2O$	мг/кг	360–430	314–350	380–420	206–224
9	$K_2O$ (ср.)	мг/кг	404	323	403	214
10	$N_0$	кг д. в./га	2400–3300	5100–5430	3000–3600	1920–2250
11	$N_0$ (среднее)	кг д. в./га	2828	5336	3272	2078
12	$P_0$	кг д. в./га	945–1260	945–1005	900–1035	1245–1305
13	$P_0$ (среднее)	кг д. в./га	1104	966	978	1269
14	$K_0$	кг д. в./га	1080–1290	942–1050	1140–1260	618–672
15	$K_0$ (среднее)	кг д. в./га	1212	970	1210	641
16	$N_0P_0K_0$	кг д. в./га	4425–5850	6999–7485	5070–5895	3813–4227
17	$N_0P_0K_0$ (среднее)	кг д. в./га	5144	7272	5460	3988
18	$N_B$	кг д. в./га	60–130	120–136	120	60
19	$N_B$ (среднее)	кг д. в./га	102	126	120	60
20	$P_B$	кг д. в./га	45–90	90	90	60
21	$P_B$ (среднее)	кг д. в./га	66	90	90	60
22	$K_B$	кг д. в./га	140–210	90–120	180–200	120
23	$K_B$ (среднее)	кг д. в./га	177	115	187	120
24	$N_BP_BK_B$	кг д. в./га	245–410	300–346	390–410	240
25	$N_BP_BK_B$ (среднее)	кг д. в./га	345	331	397	240
26	$NPK$ (ср.)	кг д. в./га	5489	7604	5858	4227

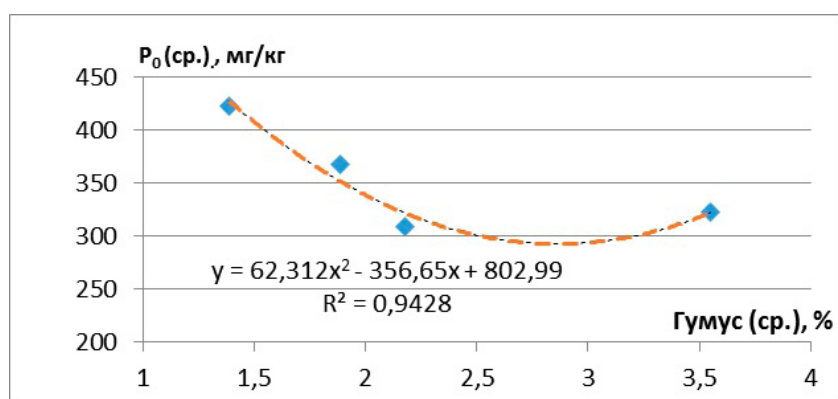


Рис. 2. Взаимосвязь между содержанием в почве фосфора и гумуса на посевах сахарной свеклы в ГСХУ (Кобрин, Молодечно, Несвиж) и ГСУ (Щучин)

Таблица 3. Опорные показатели математической модели урожайности сахарной свеклы (7)

№ п/п	Наименование	Размерность	Сортоиспытательные станции и участок			
			Кобрин	Молодечно	Несвиж	Щучин
1	$Y_{\max}$	т/га	103	113	100	89
2	$NPK_{\text{opt}}$	кг д. в./га	11000	9100	7400	4700
3	$NPK_{\text{min}}$	кг д. в./га	2900	6900	4600	3600
4	$NPK_{\text{opt}} - NPK_{\text{min}}$	кг д. в./га	7400	2200	2800	1100
5	$\frac{NPK_{\text{min}}}{NPK_{\text{opt}}}$	б/р	0,264	0,758	0,622	0,766
6	Стандартное отклонение ( $\delta$ )	т/га	2,13	4,53	3,78	3,81
7	Коэффициент детерминации ( $R^2$ )	б/р	0,94	0,84	0,92	0,87

Согласно данным табл. 3, в расчете выполнено ограничительное условие (2).

Анализ опорных показателей математической модели (табл. 3, п. 4) показывает, что разница между оптимальным и минимальным уровнями питания растений сахарной свеклы ( $NPK_{\text{opt}} - NPK_{\text{min}}$ ) в Щучинском ГСУ меньше, чем на участках ГСХУ «Кобринская СС», «Молодечненская СС» и «Несвижская СС». Причем разброс урожайностей сахарной свеклы в Щучинском ГСУ по годам исследований сконцентрирован в области, очень близкой к максимуму ( $Y_{NPK(\max)}$ ). Это вызвано тем, что высокое содержание в почве фосфора плюс дополнительная его доза, внесенная с удобрениями, при очень низком содержании в почве гумуса катастрофически сказываются на урожайности сахарной свеклы. Вероятнее всего, именно данное обстоятельство стало причиной выбраковки Государственной ко-

миссией результатов опыта с данной культурой в Щучинском ГСУ за 2021 и 2022 гг.

Графики, представленные на рис. 3, показывают, что при расчете урожайности по формуле (7) наибольшее приближение к факту наблюдается в ГСХУ «Кобринская СС» и «Несвижская СС». Менее точные результаты получены при расчете урожайности по формуле (7) по данным ГСХУ «Молодечненская СС» и Щучинский ГСУ. Вместе с тем наблюдаемая теснота связи (коэффициенты детерминации) как при эмпирическом анализе (рис. 1), так и при расчете по модельной функции (рис. 3) примерно одинакова. Заметим, что моделирование выполнено только по одному урожаеобразующему фактору (питание растений). Включение в расчет других урожаеобразующих факторов (влаги- и теплообеспеченности растений) должно повысить точность расчета.

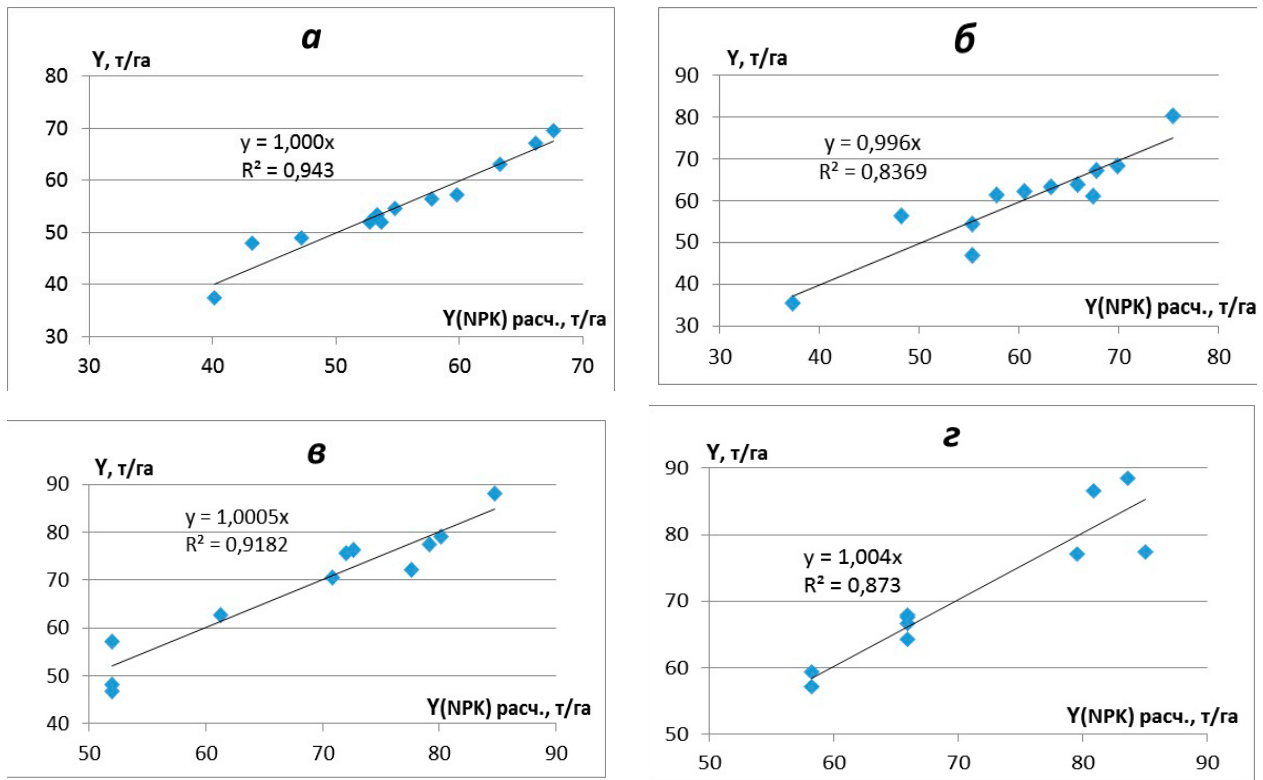


Рис. 3. Сравнение вычисленных по (7) и полученных в поле урожайностей сахарной свеклы: а – ГСХУ «Кобринская СС»; б – ГСХУ «Молодечненская СС»; в – ГСХУ «Несвижская СС»; з – Щучинский ГСУ

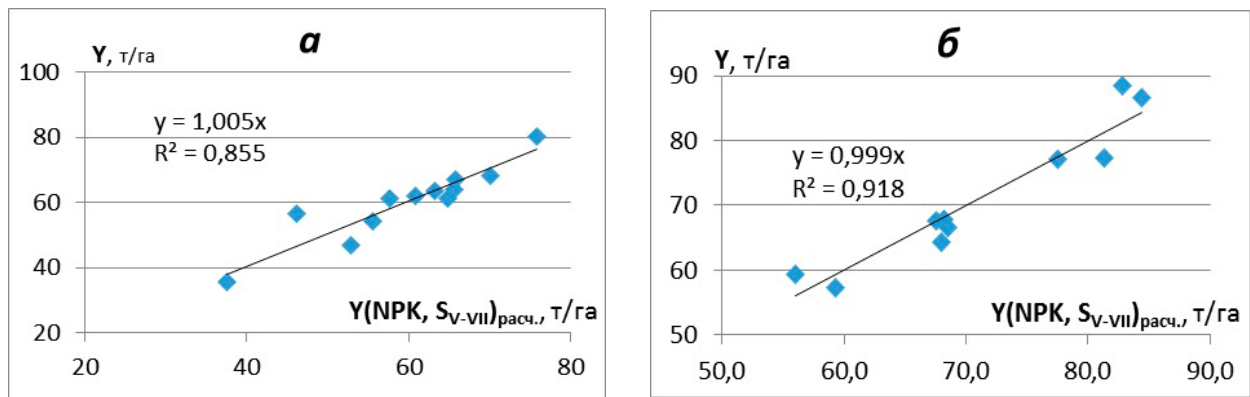


Рис. 4. Сравнение вычисленных по (9) и полученных в поле урожайностей сахарной свеклы: а – ГСХУ «Молодечненская СС»; б – Щучинский ГСУ

Проверим данное утверждение. На рис. 4 показаны результаты сравнения урожайностей сахарной свеклы, полученных в ГСХУ «Молодечненская СС» и Щучинском ГСУ и вычисленных по (7) с учетом атмосферных осадков, выпавших за наиболее ответственный для культуры период вегетации (май – июль включительно).

Ранее нами было показано, что атмосферные осадки как показатель влагообеспечен-

ности сахарной свеклы целесообразно использовать при моделировании урожайности данной культуры [19]. При учете двух урожайобразующих факторов – уровня питания и атмосферных осадков – математическая модель урожайности сахарной свеклы несколько усложняется. В соответствии с прообразом модели урожайности (5) будем иметь:

$$\frac{Y}{Y_{NPK,S(\max)}} = \left[ 1 - a_{NPK} \left( \frac{NPK_{opt} - NPK}{NPK_{opt} - NPK_{min}} \right)^2 \right] \left[ 1 - a_s \left( \frac{S_{opt} - S}{S_{opt} - S_{min}} \right)^2 \right], \quad (9)$$

где  $Y_{NPK,S}$  – максимум урожая (потенциал урожайности), полученный при оптимальном уровне питания и влагообеспеченности (при оптимальной суммарной дозе NPK и оптимальной сумме атмосферных осадков за наиболее ответственный период вегетации культуры) с учетом его снижения при неоптимальности других неучтенных урожаеформирующих факторов;  $a_S$  – коэффициент, характеризующий степень влияния влагообеспеченности на урожай;  $S_{opt}$  – оптимальное количество атмосферных осадков за наиболее ответственный период вегетации культуры, при которых достигается максимум урожая;  $S_{min}$  – условный граничный показатель суммы  $S$  (сумма атмосферных осадков за наиболее ответственный период вегетации культуры), при которой урожай не формируется.

На рис. 4 показаны результаты сравнения урожайностей сахарной свеклы, полученных в ГСХУ «Молодечненская СС» и Щучинском ГСУ и вычисленных по (9) с учетом атмосферных осадков, выпавших за наиболее ответственный для культуры период вегетации (май – июль включительно). При анализе результатов, полученных в расчетах по формуле (9), установлено, что коэффициент, характеризующий степень влияния влагообеспеченности растений на урожайность для всей свеклосеющей зоны Беларуси также можно принять равным единице ( $a_S = 1$ ).

Заметим, что расстояние от участка с сахарной свеклой в ГСХУ «Молодечненская СС» до ближайшего метеопункта «Марково», где измерялись атмосферные осадки, составляет 30 км. Конечно, результат был бы более точным,

### Заключение

Математическое моделирование зависимости урожайности сахарной свеклы, выполненное на основе физического принципа причинно-следственных взаимодействий (*causal interaction*) с использованием данных сортоиспытательных станций (гг. Кобрин, Молодечно, Несвиж) и сортоиспытательного участка (г. Щучин), подтвердило справедливость принятой теоретической основы. Установленные опорные показатели математической модели зависимости урожайности сахарной свеклы

если бы контроль выполнялся непосредственно рядом с границей участка. И нельзя ожидать, что на большом расстоянии между участком и метеопостом атмосферные осадки на них будут одинаковыми. Согласно существующим правилам при оценке тепло- и влагообеспеченности культуры, измерение осадков и температур воздуха должно проводиться на расстоянии не более 5 км от участка возделывания растений. В нашем случае данный допуск многократно превышен. Вместе с тем при сравнении коэффициентов детерминации на рис. 1 б, 3 б и 4 а видим, что даже в этом случае удалось несколько повысить тесноту связи между замеренными в поле и вычисленными урожайностями.

От метеостанции «Щучин» до Щучинского ГСУ около 10 км, что тоже достаточно много. Но полученный результат (рис. 3 г и 4 б) демонстрирует, что дополнительный учет влагообеспеченности культуры при математическом моделировании урожайности по (9) позволяет существенно повысить точность модели. В данном случае коэффициент детерминации связи заметно вырос (с 0,87 до 0,92).

Третий этап математического моделирования урожайности сельскохозяйственной культуры – это дополнительный учет такого урожаеобразующего фактора, как теплообеспеченность растений. Но для его выполнения нет оснований, поскольку контроль за температурами (среднесуточной и максимальной) воздуха проводился на вышеуказанных расстояниях от опытных участков и результаты такого моделирования не позволят получить достоверные и обоснованные выводы.

от фактора питания позволили установить вероятную причину выбраковки Государственной комиссией результатов опыта с данной культурой в Щучинском ГСУ за 2021 и 2022 гг. Отмечена необходимость дополнения применяемой методики сортоиспытаний сельскохозяйственных культур контролем за атмосферными осадками и температурами воздуха непосредственно на территории возделывания культур.



**Благодарности**

Работа выполнена в рамках подпрограммы «Плодородие почв и защита растений» Государственной программы научных исследований «Сельскохозяйственные технологии

и продовольственная безопасность на 2021–2025 годы» по заданию «Разработка методики оценки комплексного влияния водно-пищевого режима на урожайность сахарной свеклы».

**Библиографический список**

1. Красовский, Г. И. Планирование эксперимента / Г. И. Красовский, Г. Ф. Филаретов. – Минск : Изд-во БГУ, 1982. – 303 с.
2. Машарова, О. В. Режим орошения и удобрения баклажанов при поливе дождеванием на светло-каштановых почвах Волго-Донского междуречья : автореф. дис. ... канд. с.-х. наук : 06.01.02 / О. В. Машарова ; Волгоград. гос. с.-х. акад. – Волгоград, 2011. – 24 с.
3. Шенцева, Е. В. Совершенствование агротехники выращивания баклажан при капельном орошении с использованием тоннельных укрытий для получения ранней продукции : автореф. дис. ... канд. с.-х. наук : 06.01.02 / Е. В. Шенцева ; Саратов. гос. аграр. ун-т им. Н. И. Вавилова. – Саратов, 2012. – 23 с.
4. Богданенко, М. П. Технология возделывания рассадного лука при капельном орошении в Нижнем Поволжье : автореф. дис. ... канд. с.-х. наук : 06.01.02 / М. П. Богданенко ; Саратов. гос. аграр. ун-т им. Н. И. Вавилова. – Саратов, 2012. – 24 с.
5. Валге, А. М. Математическое моделирование урожайности многолетних трав / А. М. Валге, Э. А. Папушин, А. Н. Перекопский // Вестн. Рос. акад. с.-х. наук. – 2013. – № 5. – С. 8–10.
6. Прошкин, В. А. Моделирование эффективности минеральных удобрений по показателям агрохимических свойств почвы / В. А. Прошкин // Агрехимия. – 2012. – № 7. – С. 16–27.
7. Семененко, Н. Н. Торфяно-болотные почвы Полесья: трансформация и пути эффективного использования / Н. Н. Семененко. – Минск : Беларус. навука, 2015. – 282 с.
8. Степура, М. Ф. Использование методов математического моделирования при оценке систем удобрений и оптимизации минерального питания свеклы столовой / М. Ф. Степура // Овощеводство : сб. науч. тр. / Нац. акад. наук Беларуси, РУП «Институт овощеводства» ; ред. В. В. Скорина [и др.]. – Минск, 2012. – Т. 20. – С. 245–254.
9. Степура, М. Ф. Использование методов математического моделирования при оптимизации систем удобрения моркови / М. Ф. Степура // Картофель и овощи. – 2013. – № 1. – С. 19–21.
10. Абнормальные формы функции отклика «удобрения-продуктивность»: полевые наблюдения и модельный анализ / А. Г. Топаж, П. В. Лекомцев, А. В. Пасынков, А. В. Пуховский // Изв. РГАУ-МСХА им. К. А. Тимирязева. – 2015. – Вып. 2. – С. 15–27.
11. Ушакова, Е. В. Технологические приемы возделывания различных сортов сои при капельном орошении в засушливых условиях Нижнего Поволжья : автореф. дис. ... канд. с.-х. наук : 06.01.01, 06.01.02 / Е. В. Ушакова ; Саратов. гос. аграр. ун-т им. Н. И. Вавилова. – Саратов, 2015. – 24 с.
12. Шаповалов, Н. К. Математическое моделирование управления производственным процессом на посевах сахарной свеклы / Н. К. Шаповалов, И. Е. Солдат // Достижения науки и техники АПК. – 2013. – № 2. – С. 29–31.
13. Акулинина, М. А. Капельное орошение огурца в сухостепной зоне светло-каштановых почв Нижнего Поволжья : автореф. дис. ... канд. с.-х. наук : 06.01.02 / М. А. Акулинина ; Волгоград. гос. с.-х. акад. – Волгоград, 2010. – 23 с.

14. Мартынова, А. А. Совершенствование агротехнических приемов возделывания моркови на светло-каштановых почвах Нижнего Поволжья : автореф. дис. ... канд. с.-х. наук : 06.01.01 / А. А. Мартынова ; Саратов. гос. аграр. ун-т им. Н. И. Вавилова. – Саратов, 2011. – 19 с.

15. Вахонин, Н. К. Концептуальные основы моделирования урожайности в системе принятия решений по регулированию водного режима / Н. К. Вахонин // Мелиорация. – 2014. – № 2 (72). – С. 7–15.

16. Вахонин, Н. К. Моделирование урожаев в системе точного земледелия / Н. К. Вахонин // Мелиорация. – 2015. – № 1 (73). – С. 131–136.

17. Дмитренко, В. П. Оценка влияния температуры воздуха и осадков на формирование урожая основных зерновых культур / В. П. Дмитренко. – Ленинград : Гидрометеоиздат, 1976. – 49 с.

18. Лихацевич, А. П. Использование математического моделирования для повышения достоверности оценки результатов полевого агрономического опыта / А. П. Лихацевич. // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. аграр. навук. – 2018. – Т. 56, № 3. – С. 321–334.

19. Выбор показателя водного режима в математической модели урожайности сахарной свеклы / А. П. Лихацевич, Г. В. Латушкина, А. А. Левкевич, А. В. Малышко, М. Н. Титова // Мелиорация. – 2022. – № 4 (102). – С. 45–54.

Поступила 24 августа 2023 г.